Ш.А. АЛИМОВ, А.Р. ХАЛМУХАМЕДОВ,
М.А. МИРЗААХМЕДОВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК ДЛЯ 9 КЛАССОВ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

Издание четвёртое, переработанное

Рекомендован Министерством народного образования
Республики Узбекистан

ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ
«O‘QITUVCHI»
ТАШКЕНТ – 2019

УДК: 512(075.3)=161.1
ББК 22.14я72
А 45

Рецензенты:

Ф.А. Рахимова – преподаватель математики ТУИТ имени Ал-Хорезми;
Г.А. Фазылова – учитель математики школы №274 Юнусабадского района города Ташкента;
Д.Ш. Абраев – учитель математики школы №326 Алмазарского района города Ташкента.

Условные знаки, приведенные в учебнике:

текст, который важно знать и полезно запомнить (не обязательно наизусть)

начало решения задачи

конец решения задачи

начало обоснования математического доказательства или выведения формулы

конец обоснования или вывода

знак, отделяющий обязательные задачи от дополнительных

33,34... усложненные задачи;

выделение основного материала

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ! самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

практические и межпредметные задачи

исторические задачи

исторические сведения

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

ISBN 978-9943-5750-4-2

ПОВТОРЕНИЕ ТЕМ, ИЗУЧЕННЫХ В 8-ОМ КЛАССЕ

Дорогие ученики! Мы предлагаем вам несколько упражнений, чтобы вы вспомнили темы, пройденные в курсе „Алгебры“ 8 класса.

1. Постройте график функции: 1) $y=2x+3$; 2) $y=-3x+4$; 3) $y=4x-1$; 4) $y=-2x-5$. В каких четвертях расположен график функции? Назовите точки пересечения графика функции с осями Ox и Oy.

2. График функции $y=kx+b$ проходит через точки $A(0;\ -7)$, $B(2;\ 3)$. Найдите k и b.

3. Прямая проходит через точки $A(0;\ 5)$, $B\ (1;\ 2)$. Напишите уравнение этой прямой.

4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. 3 лошади и 4 коровы за день съедают 27 кг корма. За день 9 лошадей съедают на 30 кг корма больше, чем 5 коров. Сколько корма в день требуется одной лошади и одной корове?

6. Книга и тетрадь вместе стоят 5 800 сумов. 10% цены книги на 220 сумов дороже 35% цены тетради. Найдите цену книги и цену тетради по отдельности?

7. Решите неравенство:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\le 3$; 3) $|3x-4|\ge 2$.

8. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$.

10. Вычислите:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Упростите:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Решите уравнение (**12–14**):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. Путь в 240 км один автомобиль проезжает на 1 час быстрее второго. Найдите скорости каждого автомобиля, если скорость первого автомобиля на 20 км/ч больше скорости второго.

16. 1) Разность двух чисел равна 2,5, а разность их квадратов равна 10. Найдите эти числа.

2) Найдите два числа, если их сумма равна 1,4, а сумма их квадратов равна 1.

17. Найдите 1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$,

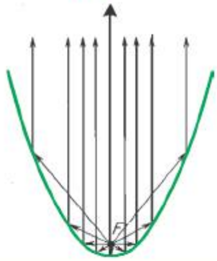
если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2-8x+3=0$.

18. Округлите числа до сотых. Найдите относительную погрешность округления: 1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Запишите число в стандартном виде:

1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

ГЛАВА I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА



§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

В VIII классе вы познакомились с линейной функцией $y=kx+b$ и ее графиком.

В различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют *квадратичными функциями.* Приведем примеры.

1) Площадь квадрата со стороной x вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью v, то в момент времени t расстояние от него до поверхности земли определяется по формуле $s=-\frac{gt^2}{2}+vt+s_0$, где s_0 – расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t=0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y=ax^2+bx+c$. В первом примере $a=1$, $b=c=0$, а переменными являются x и y. Во втором примере $a=-\frac{g}{2}$, $b=v$, $c=s_0$, а переменные обозначены буквами t и s.

! **Определение.** ***Функция $y=ax^2+bx+c$, где a, b и c – заданные действительные числа, $a\neq 0$, x – действительная переменная, называется квадратичной функцией.***

Например, квадратичными являются функции:

$y = x^2$, $\quad y=-2x^2$, $\quad y=x^2-x$,

$y=x^2-5x+6$, $\quad y=-3x^2+\frac{1}{2}x$.

Задача 1. Найдите значение функции

$$y(x)=x^2-5x+6$$

при $x=-2$, $x=0$, $x=3$.

$$\triangle\ y(-2)=(-2)^2-5\cdot(-2)+6=20;$$
$$y(0)=0^2-5\cdot 0+6=6;$$
$$y(3)=3^2-5\cdot 3+6=0.\ \blacktriangle$$

Задача 2. При каких значениях x квадратичная функция $y=x^2+4x-5$ принимает значение, равное: 1) 7; 2) –9; 3) –8; 4) 0?

$\triangle$ 1) По условию $x^2+4x-5=7$. Решая это уравнение, получаем:

$$x^2+4x-12=0,$$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm 4,\ x_1=2,\ x_2=-6.$$

Следовательно, $y(2)=7$ и $y(-6)=7$.

2) По условию $x^2+4x-5=-9$, откуда

$$x^2+4x+4=0,\quad (x+2)^2=0,\quad x=-2.$$

3) По условию $x^2+4x-5=-8$, откуда $x^2+4x+3=0$. Решая это уравнение, находим $x_1=-3$, $x_2=-1$.

4) По условию $x^2+4x-5=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-5$. $\blacktriangle$

В последнем случае были найдены значения x, при которых значения функции $y=x^2+4x-5$ равны 0, то есть $y(1)=0$ и $y(-5)=0$. Такие значения x называют *нулями квадратичной функции.*

Задача 3. Найдите нули функции $y=x^2-3x$.

$\triangle$ Решая уравнение $x^2-3x=0$, находим $x_1=0$, $x_2=3$. $\blacktriangle$

Упражнения

1. (Устно.) Которая из следующих функций является квадратичной:
1) $y=2x^2+x+3$; 2) $y=3x^2-1$; 3) $y=5x+1$;
4) $y=x^3+7x-1$; 5) $y=4x^2$; 6) $y=-3x^2+2x$?

2. Найдите действительные значения x, при которых квадратичная функция $y=x^2-x-3$ принимает значение, равное: 1) –1; 2) –3; 3) $-\frac{13}{4}$; 4) –5.

3. При каких действительных значениях x квадратичная функция $y=-4x^2+3x-1$ принимает значение, равное: 1) –2; 2) –8; 3) –0,5; 4) –1?

4. Определите, какие из чисел –2; 0; 1; $\sqrt{3}$ являются нулями квадратичной функции:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Найдите нули квадратичной функции:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Найдите коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если известны нули x_1 и x_2 этой функции:

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4, x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

7. Найдите значения x, при которых функции $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ принимают равные значения.

§2. ФУНКЦИЯ $y = x^2$

Рассмотрим функцию $y = x^2$, то есть функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = c = 0$. Для построения графика этой функции составим таблицу ее значений:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Построив указанные в таблице точки и соединив их плавной линией, получим график функции $y = x^2$ (рис. 1).

! Кривая, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется *параболой*.

Рассмотрим свойства функции $y = x^2$.

1) Значение функции $y = x^2$ *положительно* при $x \neq 0$ и *равно нулю* при $x = 0$. Следовательно, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат,

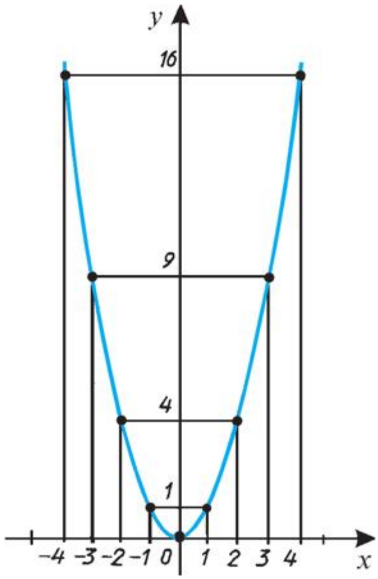


Рис. 1.

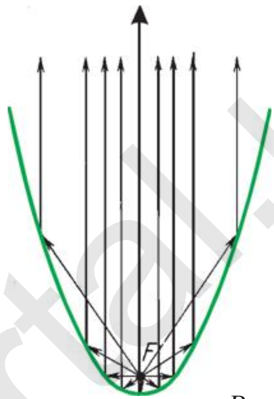


Рис. 2.

а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что парабола $y = x^2$ *касается оси абсцисс* в точке (0; 0).

2) График функции $y=x^2$ *симметричен относительно оси ординат,* так как $(-x)^2=x^2$. Например, $y(-3)= y(3) = 9$ (рис. 1). Таким образом, ось ординат является *осью симметрии параболы.* Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют *вершиной параболы.* Для параболы $y=x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x\geq 0$ большему значению x соответствует большее значение y. Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является *возрастающей на промежутке* $x \geq 0$ (рис. 1).

При $x \leq 0$ большему значению x соответствует меньшее значение y. Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является *убывающей на промежутке* $x \leq 0$ (рис. 1).

Задача. Найдите координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

△ Координаты точек пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x^2 = x + 6$, то есть $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Подставляя значения x_1 и x_2 в одно из уравнений системы, находим $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ: (3; 9), (–2; 4).

Парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка F, которую называют *фокусом параболы* (рис. 2). Если в этой точке находится источник света, то все отраженные от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Упражнения

8. На миллиметровой бумаге постройте график функции $y = x^2$. По графику приближенно найдите:

1) значение y при $x = 0{,}8$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}9$; $x = -2{,}3$; $x = -1{,}5$;

2) значение x, если $y = 2$; $y = 3$; $y = 4{,}5$; $y = 6{,}5$.

9. Не строя графика функции $y = x^2$, определите, какие из точек: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$ принадлежат ему.

10. (Устно.) Найдите координаты точек, симметричных точкам $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ относительно оси ординат. Принадлежат ли все эти точки графику функции $y = x^2$?

11. (Устно.) Сравните значения функции $y=x^2$ при:

1) $x = 2{,}5$ и $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ и $x = 0{,}3$;

3) $x = -0{,}2$ и $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ и $x = -5{,}2$

12. Найдите координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:

1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;

4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$

13. Является ли точка A точкой пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:
1) $y = -x - 6$, $A(-3; 9)$; 2) $y = 5x - 6$, $A(2; 4)$?

14. Верно ли утверждение, что функция $y = x^2$ возрастает:
1) на отрезке $[1; 4]$; 2) на интервале $(2; 5)$;
3) на интервале $x > 3$; 4) на отрезке $[-3; 4]$?

15. На одной координатной плоскости построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3$. При каких значениях x точки параболы лежат выше прямой; ниже прямой?

16. При каких x значения функции $y = x^2$:
1) больше 9; 2) не больше 25;
3) не меньше 16; 4) меньше 36?

§3. ФУНКЦИЯ $y = ax^2$

Задача 1. Постройте график функции $y = 2x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = 2x^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую линию (рис. 3). ▲

Сравним графики функций $y=2x^2$ и $y=x^2$ (рис. 3). При одном и том же значении x значение функции $y=2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y=x^2$. Это значит, что каждую точку графика функции $y=2x^2$ можно получить из точки графика функции $y=x^2$ с той же абсциссой увеличением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y=2x^2$ получается *растяжением графика функции* $y=x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

Задача 2. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y=\frac{1}{2}x^2$:

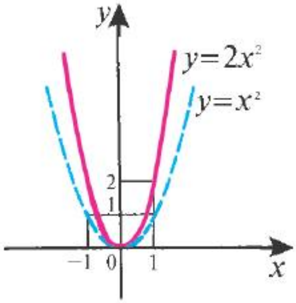


Рис. 3.

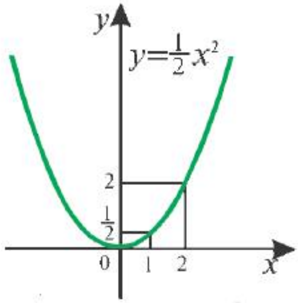


Рис. 4.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Построив найденные точки, проведем через них плавную кривую линию (рис. 4). ▲

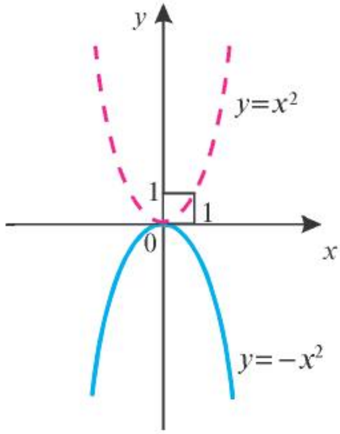
Сравним графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y = x^2$. Каждую точку графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ можно получить из точки графика функции $y=x^2$ с той же абсциссой уменьшением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ получается *сжатием графика функции* $y=x^2$ к оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

Задача 3. Постройте график функции $y = -x^2$.

△ Сравним функции $y=-x^2$ и $y=x^2$. При одном и том же x значения этих функций равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, график функции $y=-x^2$ можно получить симметрией графика функции $y=x^2$ относительно оси Ox (рис. 5). ▲

Аналогично, график функции $y=-\frac{1}{2}x^2$ симметричен графику функции $y=\frac{1}{2}x^2$ относительно оси Ox (рис. 6).



0

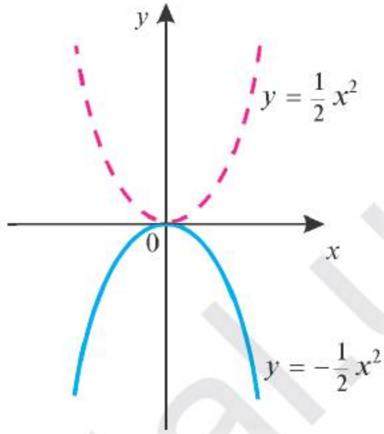


Рис. 5. *Рис. 6.*

График функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ также называют *параболой*. При $a > 0$ ветви параболы направлены *вверх*, а при $a < 0$ – *вниз*.

Заметим, что фокус параболы $y = ax^2$ находится в точке $\left(\mathbf{0}; \frac{1}{4a}\right)$.

Перечислим *основные свойства функции* $y = ax^2$, где $a \neq 0$:

1) если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ принимает положительные значения при $x \neq 0$;

если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ принимает отрицательные значения при $x \neq 0$;

Значение функции $y = ax^2$ равно 0 только при $x = 0$;

2) парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси ординат;

3) если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$;

если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ убывает при $x \geq 0$ и возрастает при $x \leq 0$.

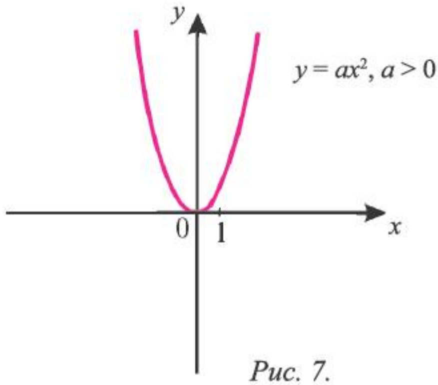


Рис. 7.

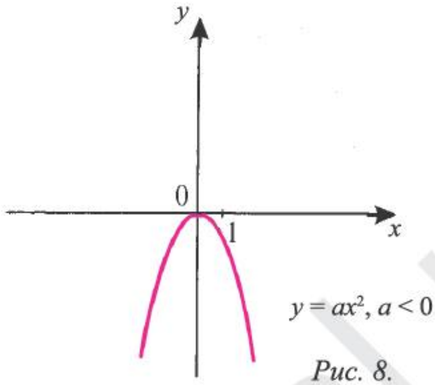


Рис. 8.

Все эти свойства можно увидеть на графике (рисунки 7 и 8).

Упражнения

17. На миллиметровой бумаге постройте график функции $y = 3x^2$. По графику приближенно найдите:

1) значения y при $x = -2{,}8;\ -1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$;

2) значения x, если $y = 9;\ 6;\ 2;\ 8;\ 1{,}3$.

18. (Устно.) Определите направление ветвей параболы:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. На одной координатной плоскости постройте графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ и $y = -3x^2$;

3) $y = 3x^2$ и $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Используя графики, выясните, какие из этих функций возрастают на промежутке $x \geq 0$.

20. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 2x^2$ и $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Является ли убывающей на промежутке $x \le 0$ функция:

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. Выясните, является ли функция $y = -2x^2$ возрастающей или убывающей:

1) на отрезке $[-4; -2]$;
2) на отрезке $[-5; 0]$;
3) на интервале $(3; 5)$;
4) на интервале $(-3; 2)$.

23. Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где s – путь в метрах; a – ускорение в м/с^2; t – время в секундах. Найдите ускорение a, если за 6 с тело прошло путь, равный 96 м.

§4. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$

Задача 1. Постройте график функции $y=x^2 - 2x + 3$ и сравните его с графиком функции $y = x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = x^2 - 2x + 3$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 9).

Для сравнения графиков преобразуем формулу $y = x^2 - 2x + 3$, используя метод выделения полного квадрата:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Сначала сравним графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Заметим, что если $(x_1; y_1)$ — точка параболы $y = x^2$, то есть $y_1 = x_1^2$, то точка $(x_1 + 1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x-1)^2$, так как $((x_1+1)-1)^2 = x_1^2 = y_1$. Следовательно, графиком функции $y = (x-1)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = x^2$ *сдвигом* (параллельным переносом) вправо на единицу (рис. 10).

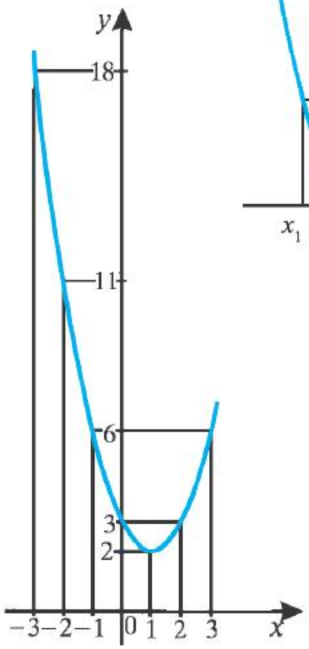


Рис. 9.

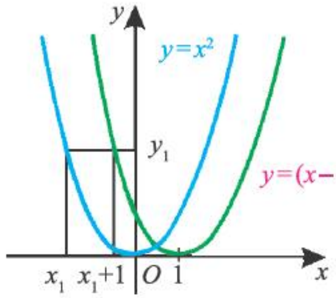


Рис. 10.

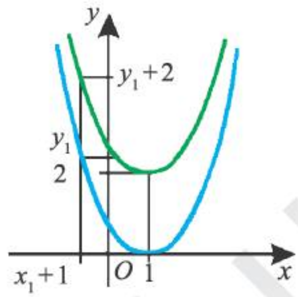


Рис. 11.

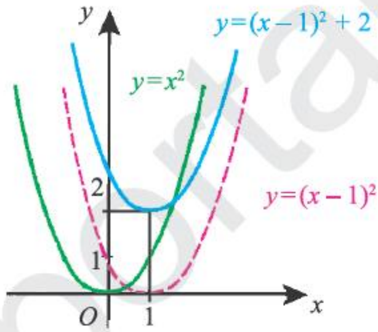


Рис. 12.

Теперь сравним графики функций $y=(x-1)^2$ и $y=(x-1)^2+2$. При каждом x значение функции $y=(x-1)^2+2$ больше значения функции $y=(x-1)^2$ на 2. Следовательно, графиком функции $y=(x-1)^2+2$ является парабола, полученная сдвигом параболы $y=(x-1)^2$ вверх на две единицы (рис. 11).

Таким образом, графиком функции $y=x^2-2x+3$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y=x^2$ на единицу вправо и на две единицы вверх (рис. 12). Осью симметрии параболы $y=x^2-2x+3$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы точку – (1; 2). ▲

Аналогично доказывается, что *графиком функции* $y=a(x-x_0)^2+y_0$ *является парабола, получаемая сдвигом параболы* $y=ax^2$:

вдоль оси абсцисс вправо на x_0, если $x_0>0$, влево на $|x_0|$, если $x_0<0$;

вдоль оси ординат вверх на y_0, если $y_0>0$, вниз на $|y_0|$, если $y_0<0$.

Любую квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$ с помощью выделения полного квадрата *можно записать в виде*

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

то есть в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Таким образом, графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей. Равенство $y=ax^2+bx+c$ называют *уравнением параболы.* Координаты $(x_0;\ y_0)$ вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ можно найти по формулам:

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c.$$

Ось симметрии параболы $y=ax^2+bx+c$ – прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы.

Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх, если $a>0$, и направлены вниз, если $a<0$.

Задача 2. Найдите координаты вершины параболы $y=2x^2-x-3$.
△ Абсцисса вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}.$$

Ордината вершины параболы:

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-3=-3\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

Задача 3. Запишите уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку (–2; 5), а ее вершиной является точка (–1; 2).
△ Так как вершиной параболы является точка (–1; 2), то уравнение параболы можно записать в виде:

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

По условию точка (–2; 5) принадлежит параболе, следовательно,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

откуда $a = 3$.

Таким образом, парабола задается уравнением

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{или} \quad y = 3x^2 + 6x + 5. \blacktriangle$$

Упражнения

Найдите координаты вершины параболы (**24–26**):

24. (Устно.)
1) $y = (x - 3)^2 - 2$;
2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$;
4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$;
2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;
4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = -x^2 - 5$;
3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$;
5) $y = -3x^2 + x$;
6) $y = 2x^2 - x$.

27. Найдите на оси Ox точку, через которую проходит ось симметрии параболы:
1) $y = x^2 + 3$;
2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$;
4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$;
6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. Проходит ли ось симметрии параболы $y = x^2 - 10x$ через точку:
1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1)?

29. Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат:
1) $y = x^2 - 3x + 2$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;
4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Напишите уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку (–1; 6), а ее вершиной является точка (1; 2).

31. (Устно.) Принадлежит ли точка (1;–6) параболе $y=-3x^2+4x-7$?

32. Найдите значение k, если точка (–1; 2) принадлежит параболе:
1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$.

33. С помощью шаблона параболы $y=x^2$ постройте график функции:
1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$; 3) $y=x^2-2$;
4) $y=-x^2+1$; 5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

34. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y=2x^2$:
1) сдвигом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо;
2) сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх;
3) сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево и вдоль оси Oy на единицу вниз;
4) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 единицы вправо и вдоль оси Oy на 3,5 единицы вверх.

§5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Задача 1. Постройте график функции $y=x^2-4x+3$.
△ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$
$$y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

Построим точку (2; –1).

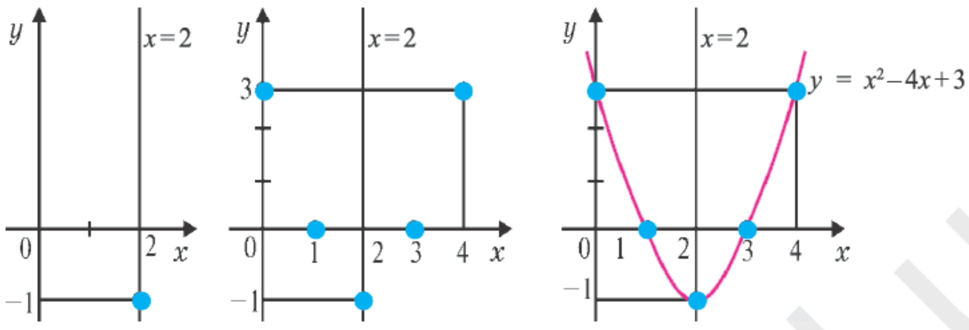
2. Проведем через точку (2; –1) прямую, параллельную оси ординат, – ось симметрии параболы (рис. 13-*a*).

3. Решая уравнение $x^2-4x+3=0$ найдем нули функции: $x_1=1$, $x_2=3$. Построим точки (1; 0) и (3; 0) (рис. 13-*b*).

4. Возьмем две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x=2$, например, $x=0$ и $x=4$. Вычислим значения функции в этих точках: $y(0)=y(4)=3$.

Построим точки (0; 3) и (4; 3) (рис. 13-*b*).

5. Проведем параболу через построенные точки (рис. 13-*c*). ▲



a) b) c) *Рис. 13.*

По такой же схеме можно *построить график любой квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$:

1. Построить вершину параболы $(x_0; y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, – ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси. Для этого надо взять две точки на оси Ox, симметричные относительно точки x_0 $(x_0 \neq 0)$, и вычислить соответствующие значения функции, (эти значения одинаковы). Например, можно построить точки параболы с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0$, (ординаты этих точек равны c).

5. Провести через построенные точки параболу. Заметим, что для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы.

Задача 2. Постройте график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

△ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3,\ y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Построим точку (3; –1) (рис. 14).

2. Проведем через точку (3; –1) ось симметрии параболы (рис. 14).

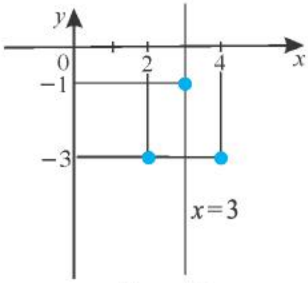


Рис. 14.

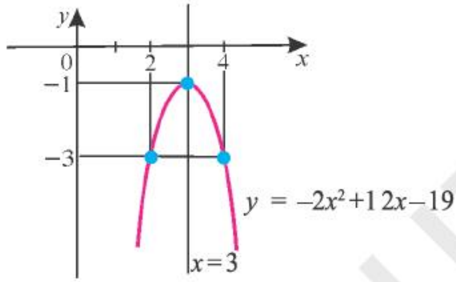


Рис. 15.

3. Решая уравнение $-2x^2 + 12x - 19 = 0$, убеждаемся в том, что уравнение не имеет действительных корней, и, следовательно, парабола не пересекает ось Ox.

4. На оси Ox возьмем две точки, симметричные относительно точки $x = 3$, например, точки $x = 2$ и $x = 4$. Вычислим значение функции в этих точках:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

Построим точки $(2; -3)$ и $(4; -3)$ (рис. 14).

5. Проведем параболу через найденные точки (рис. 15). ▲

Задача 3. Постройте график функции $y = -x^2 + x + 6$ и выясните, какими свойствами обладает эта функция.

△ Для построения графика функции найдем нули функции: $-x^2+x+6=0$, откуда $x_1=-2$, $x_1=3$. Координаты вершины параболы можно найти так:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

Так как $a=-1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Найдем еще несколько точек параболы: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)= 6$, $y(2) = 4$. Строим параболу (рис. 16).

С помощью графика функции получим следующие *свойства функции* $y =-x^2+ x + 6$:

1) при любых значениях x значения функции меньше или равны $6\frac{1}{4}$;

2) значения функции положительны при $-2<x<3$, отрицательны при $x<-2$ и $x>3$, равны нулю при $x=-2$ и $x=3$;

3) функция возрастает на промежутке $x \le \frac{1}{2}$, убывает на промежутке $x \ge \frac{1}{2}$;

4) при $x=\frac{1}{2}$ функция принимает наибольшее значение, равное $6\frac{1}{4}$;

5) график функции симметричен относительно прямой $x=\frac{1}{2}$. ▲

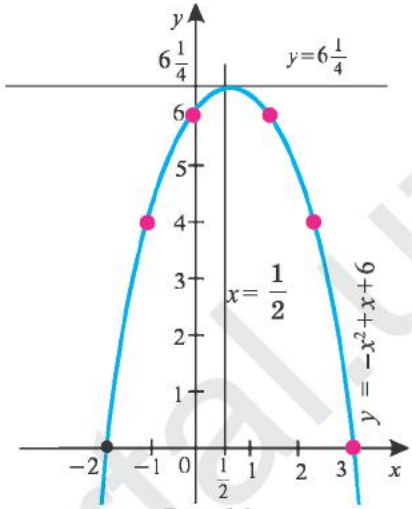


Рис. 16.

Отметим, что функция $y=ax^2+bx+c$ принимает *наименьшее* или *наибольшее* значение в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, которое является абсциссой вершины параболы.

Значение функции в точке x_0 можно найти по формуле $y_0 = y(x_0)$. *Если $a > 0$, то функция имеет наибольшее значение, а если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение.*

Например, функция $y = x^2 - 4x + 3$ при $x = 2$ принимает наименьшее значение, равное -1 (рис. 13-c); функция $y = -2x^2 + 12x - 9$ при $x = 3$ принимает наибольшее значение, равное -1 (рис. 15).

Задача 4. Сумма двух положительных чисел равна 6. Найдите эти числа, если сумма их квадратов наименьшая. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

△ Обозначим первое число буквой x, тогда второе число равно $6-x$, а сумма их квадратов равна $x^2 + (6 - x)^2$. Преобразуем это выражение:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $y=2x^2-12x+36$. Найдем координаты вершины этой параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\cdot 2} = 3,\ y_0 = y(3) = 2\cdot 9 - 12\cdot 3 + 36 = 18.$$

Итак, при $x = 3$ функция принимает наименьшее значение, равное 18.

Таким образом, первое число равно 3, второе также равно $6 - 3 = 3$. Значение суммы квадратов этих чисел равно 18. ▲

Упражнения

35. Найдите координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$;
4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 - 3x + 5$;
2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$;
4) $y = 7x^2 + 14$.

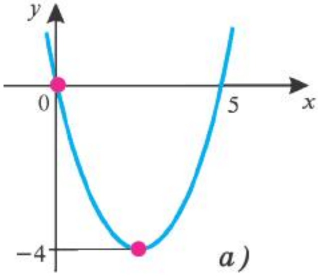
Постройте график функции и по графику: 1) найдите значения x, при которых значения функции положительны; отрицательны; 2) найдите промежутки убывания и возрастания функции; 3) выясните, при каком значении x функция принимает наибольшее и наименьшее значение **(37–38):**

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$;
2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$;
4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$;
2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$;
4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. По данному графику квадратичной функции (рис. 17) выясните ее свойства.

40. Число 15 представьте в виде суммы двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.



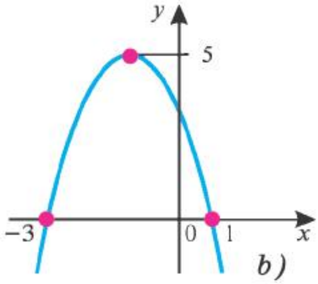


Рис. 17.

41. Сумма двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

42. Участок прямоугольной формы, примыкающий к стене дома, нужно огородить с трех сторон забором длиной 12 м. Какими должны быть размеры участка, чтобы его площадь была наибольшей?

43. В треугольнике сумма основания и высоты, опущенной на это основание, равна 14 см. Может ли такой треугольник иметь площадь, равную 25 см^2?

44. Не строя график, определите, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; найдите это значение:

1) $y = x^2 - 6x + 13$;　　2) $y = x^2 - 2x - 4$;

3) $y = -x^2 + 4x + 3$;　　4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Определите знаки коэффициентов уравнения параболы

$y = ax^2 + bx + c$, если:

1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината положительна;

2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината ее вершины отрицательны.

46. С высоты 5 м вертикально вверх из лука выпущена стрела с начальной скоростью 50 м/с. Высота h м, на которой находится стрела через t секунд, вычисляется по формуле

$$h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2},$$ где $g \approx 10$ м/с^2.

Через сколько секунд стрела: 1) достигнет наибольшей высоты и какой; 2) упадет на землю?

§6. КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО И ЕГО РЕШЕНИЕ

Задача 1. Стороны прямоугольника равны 2 дм и 3 дм. Каждую сторону увеличили на одинаковое число дециметров так, что площадь прямоугольника стала больше 12 дм^2. Как изменилась каждая сторона?

△ Пусть каждая сторона прямоугольника увеличена на x дециметров. Тогда стороны прямоугольника равны $(2 + x)$ и $(3+x)$, а его площадь равна $(2+x)(3+x)$ квадратных дециметров. По условию задачи $(2+x)(3+x)>12$, откуда $x^2+5x+6 > 12$ или $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Разложим левую часть этого неравенства на множители:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Так как по условию задачи $x > 0$, то $x + 6 > 0$.

Поделив обе части неравенства на $x + 6$, получим $x-1 >0$, то есть $x > 1$.

Ответ: каждую сторону прямоугольника увеличили больше чем на 1 дм. ▲

В неравенстве $x^2 + 5x - 6 > 0$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример квадратного неравенства.

! **Если в левой части неравенства квадратный трехчлен, а в правой нуль, то такое *неравенство* называют *квадратным*.**

Например, неравенства

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \qquad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

являются квадратными.

Напомним, что *решением неравенства* с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Задача 2. Решите неравенство:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ Квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет два различных корня $x_1=2$, $x_2=3$. Следовательно, квадратный трехчлен x^2-5x+6 можно разложить на множители:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Поэтому данное неравенство можно записать так:

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Произведение двух множителей положительно, если они имеют одинаковые знаки.

1) Рассмотрим случай, когда оба множителя положительны, то есть $x-2>0$ и $x-3>0$.

Эти два неравенства образуют систему: $\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0. \end{cases}$

Решая систему, получим $\begin{cases} x>2, \\ x>3 \end{cases}$, откуда $x>3$.

Итак, все числа $x>3$ являются решениями неравенства $(x-2)(x-3)>0$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда оба множителя отрицательны, то есть $x-2<0$ и $x-3<0$.

Эти два неравенства образуют систему: $\begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$

Решая систему, получим $\begin{cases} x<2, \\ x<3 \end{cases}$, откуда $x<2$.

Итак, все числа $x<2$ также являются решениями неравенства $(x-2)(x-3)>0$.

Таким образом, решениями неравенства $(x-2)(x-3)>0$, а значит, и неравенства $x^2-5x+6>0$ являются числа $x<2$, а также числа $x>3$.

Ответ: $x<2$, $x>3$. ▲

Вообще, если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня, то решение квадратного неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$ можно свести к решению системы неравенств первой степени, разложив левую часть квадратного неравенства на множители.

Задача 3. Решите неравенство $-3x^2 - 5x + 2 > 0$.

△ Чтобы удобнее проводить вычисления, представим данное неравенство в виде квадратного неравенства с положительным первым коэффициентом. Для этого умножим обе его части на -1:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

Найдем корни уравнения $3x^2+5x-2=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5\pm 7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Разложив квадратный трехчлен на множители, получим:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Отсюда получим две системы.

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3}>0, \\ x+2<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3}<0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

Первую систему можно записать так:

$$\begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x<-2, \end{cases}$$

откуда видно, что она не имеет решений.

Решая вторую систему, находим:

$$\begin{cases} x<\frac{1}{3}, \\ x>-2, \end{cases}$$

откуда $-2 < x < \frac{1}{3}$.

Следовательно, решениями неравенства $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$, то есть неравенства $-3x^2-5x+2>0$, являются все числа интервала $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $-2 < x < \frac{1}{3}$. ▲

Упражнения

47. (Устно.) Укажите, какие из следующих неравенств являются квадратными:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \le 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \le 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Сведите следующие неравенства к квадратным:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Устно.) Какие из чисел 0; –1; 2 являются решениями неравенства

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \ge 0$;
3) $x^2 - x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$?

Решите неравенство (**50–52**):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$; 3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

53. Решите неравенство:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \le 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Постройте график функции. По графику найдите все значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. Известно, что числа x_1 и x_2 (где $x_1 < x_2$) являются нулями функции $y = ax^2 + bx + c$. Докажите, что если число x_0 заключено между x_1 и x_2, то есть $x_1 < x_0 < x_2$, то выполняется неравенство $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$

§7. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним, что квадратичная функция задается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Поэтому решение квадратного неравенства сводится к отысканию нулей квадратичной функции и промежутков, на которых она принимает положительные или отрицательные значения.

Задача 1. Решите с помощью графика неравенство:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

△ График квадратичной функции $y = 2x^2 - x - 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем точки пересечения этой параболы с осью Ox. Для этого решим квадратное уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Корни этого уравнения: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

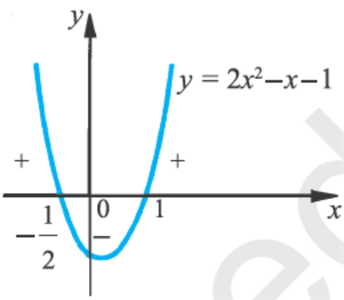


Рис. 18.

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x=1$ (рис. 18).

Неравенству $2x^2 - x - 1 \leq 0$ удовлетворяют те значения x, при которых значения функции равны нулю или отрицательны, то есть те значения x, при которых точки параболы лежат на оси Ox или ниже этой оси. Из рисунка 18 видно, что этими значениями являются все числа из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

График этой функции можно использовать и при решении других неравенств, которые отличаются от данного только знаком неравенства. Из рисунка 18 видно, что:

1) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 < 0$ являются числа интервала $-\frac{1}{2} < x < 1$, то есть $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$;

2) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 > 0$ являются все числа промежутков $x < -\frac{1}{2}$ и $x > 1$;

3) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 \geq 0$ являются все числа промежутков $x \leq -\frac{1}{2}$ и $x \geq 1$.

Задача 2. Решите неравенство:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

△ Построим эскиз графика функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Ветви этой параболы направлены вверх. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет один корень $x = -\frac{1}{2}$, поэтому парабола касается оси Ox в точке $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. График этой функции изображен на рисунке 19. Для решения данного неравенства нужно установить, при каких значениях x значения функции положительны. Таким образом, неравенству $4x^2 + 4x + 1 > 0$ удовлетворяют те значения x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox. Из рисунка 19 видно, что такими являются все действительные числа x, кроме $x = -0{,}5$.

Ответ: $x \neq -0{,}5$. ▲

Из рисунка 19 видно также, что:

1) решениями неравенства $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ являются все действительные числа;

2) неравенство $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ имеет одно решение $x = -\frac{1}{2}$;

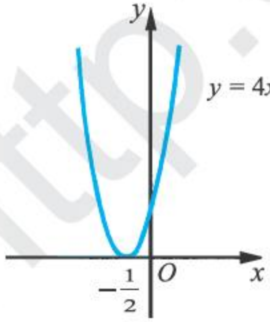


Рис. 19.

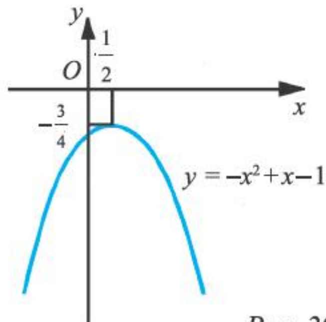


Рис. 20.

3) неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ не имеет решений.

Это неравенство можно решить устно, если заметить, что $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$.

Задача 3. Решите неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$.

△ Построим эскиз графика функции $y = -x^2 + x - 1$. Ветви этой параболы направлены вниз. У уравнения $-x^2 + x - 1 = 0$ действительных корней нет, поэтому парабола не пересекает ось Ox. Следовательно, эта парабола расположена ниже оси Ox (рис. 20). Это означает, что значения квадратичной функции при всех x отрицательны, то есть неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$ выполняется при всех действительных значениях x. ▲

Из рисунке 20 видно также, что решениями неравенства $-x^2 + x - 1 \le 0$ являются все значения x, а неравенства $-x^2 + x - 1 > 0$ и $-x^2 + x - 1 \ge 0$ не имеют решений.

Итак, *для решения квадратного неравенства с помощью графика* нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;

2) найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;

3) построить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть;

4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Упражнения

56. Постройте график функции $y = x^2 + x - 6$. Определите по графику значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

57. (Устно.) Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 21), укажите, при каких значениях x эта функция принимает положительные значения; отрицательные значения, значение равное нулю.

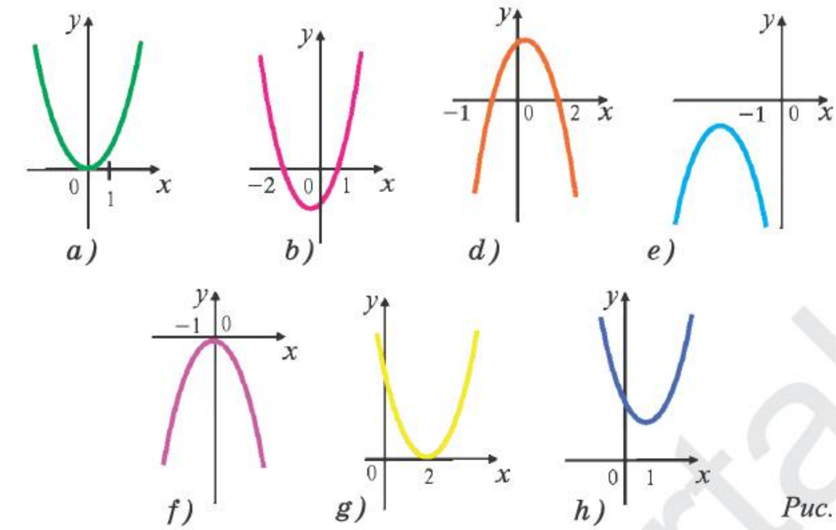


Рис. 21.

Решите квадратное неравенство (**58–62**):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Устно.) Решите неравенство:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

Решите квадратное неравенство (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \le -8$; 2) $x^2 + 12x \ge -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \ge 0$; 6) $3x^2 + x \le 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
3) $6x^2 + 1 \le 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. Найдите все значения x, при которых функция принимает значения, не большие нуля:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) Покажите, что при $q > 1$ решениями неравенства $x^2 - 2x + q > 0$ являются все действительные значения x;
2) покажите, что при $q > 1$ неравенство $x^2 + 2x + q \le 0$ не имеет решений.

69. Найдите все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$.

§8. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

При решении неравенств часто применяется *метод интервалов.* Поясним этод метод на примерах.

Задача 1. Выясните при каких значениях x квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 3$ принимает положительные значения, а при каких – отрицательные.

△ Найдем корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Поэтому $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Точки $x = 1$ и $x = 3$ (рис. 22) разбивают числовую ось на три промежутка: $x < 1$; $1 < x < 3$; $x > 3$.

Рис. 22.

Промежутки $x < 1$, $x > 3$, так же как и промежуток $1 < x < 3$ называют *интервалами*.

Двигаясь вдоль числовой оси справа налево, видим, что на интервале $x > 3$ трехчлен $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ принимает положительные значения, так как в этом случае оба множителя $x - 1$ и $x - 3$ положительны.

На следующем интервале $1 < x < 3$ этот трехчлен принимает отрицательные значения. Это происходит потому, что в произведении $(x - 1)(x - 3)$ при переходе через точку $x = 3$ первый множитель $x - 1$ не меняет знак, а второй $x - 3$ меняет знак.

При переходе через точку $x = 1$ трехчлен снова меняет знак, так как в произведении $(x - 1)(x - 3)$ первый множитель $x - 1$ меняет знак, а второй $x - 3$ не меняет.

Итак, при движении по числовой оси справа налево от одного интервала к соседнему знаки произведения $(x-1)(x-3)$ чередуются.

Таким образом, задачу о знаке квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 3$ можно решить следующим способом.

Отмечаем на числовой оси корни уравнения $x^2-4x+3=0$: точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Они разбивают числовую ось на три интервала (рис. 22). Заметив, что на интервале $x > 3$ значения трехчлена $x^2 - 4x + 3$ положительны, расставляем его знаки на остальных интервалах в порядке чередования (рис. 23).

Из рисунка 23 видно, что $x^2 - 4x + 3 > 0$ при $x < 1$ и $x > 3$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$ при $1 < x < 3$. ▲

Рис. 23.

Рассмотренный способ называют *методом интервалов*. Этот метод используется при решении квадратных и некоторых других неравенств.

Например, решая задачу 1, мы практически решили методом интервалов неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Задача 2. Решите неравенство $x^3 - x < 0$.

△ Разложим многочлен $x^3 - x$ на множители:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Следовательно, неравенство можно записать так:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

Отметим на числовой оси точки –1, 0 и 1. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала (рис. 24):

$$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 1.$$

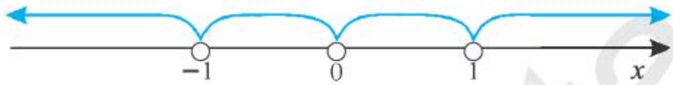


Рис. 24.

При $x > 1$ все множители произведения $(x + 1)x(x - 1)$ положительны, и поэтому $(x+1)x(x-1)>0$ на интервале $x>1$. Учитывая смену знака произведения при переходе к соседнему интервалу, найдем для каждого интервала знак произведения $(x+1)x(x-1)$ (рис. 25).

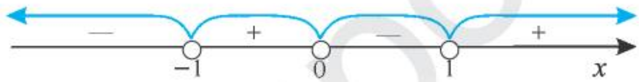


Рис. 25.

Таким образом, решениями неравенства являются все значения x из интервалов $x<-1$ и $0<x<1$.

Ответ: $x < -1,\ 0 < x < 1$. ▲

Задача 3. Решите неравенство $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$.

△ Данное неравенство можно записать в виде:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Так как $(x + 3)^2 > 0$ при всех $x \neq -3$, то при $x \neq -3$ множества решений неравенства (1) неравенства

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

совпадают.

Значение $x = -3$ не является решением неравенства (1), так как при $x = -3$ левая часть неравенства равна 0.

Решая неравенство (2) методом интервалов, получаем $x < 2$, $x > 3$ (рис. 26).

Рис. 26.

Учитывая, что $x = -3$ не является решением исходного неравенства, окончательно получаем:

$$x < -3, \quad -3 < x < 2, \quad x > 3. \blacktriangle$$

Задача 4. Решите неравенство:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

$\triangle$ Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \qquad (3)$$

Отметим на числовой оси точки –3; –1; 1; 4, в которых числитель или знаменатель дроби обращаются в нуль. Эти точки разбивают числовую прямую на пять интервалов (рис. 27). При $x > 4$ все множители числителя и знаменателя положительны, и поэтому дробь положительна.

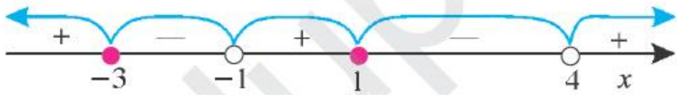


Рис. 27.

При переходе от одного интервала к следующему дробь меняет знак, поэтому можно расставить знаки дроби так, как это показано на рисунке 27. Значения $x = -3$ и $x = 1$ удовлетворяют неравенству (3), а при $x = -1$ и $x = 4$ дробь не имеет смысла. Таким образом, исходное неравенство имеет следующие решения:

$$x \leq -3, \quad -1 < x \leq 1, \quad x > 4. \blacktriangle$$

Упражнения

70. (Устно.) Покажите, что значение $x = 5$ является решением неравенства:

1) $(x - 1)(x - 3) > 0$;
2) $(x + 2)(x + 5) > 0$;
3) $(x - 7)(x - 10) > 0$;
4) $(x + 1)(x - 4) > 0$.

Решите методом интервалов неравенство (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;

3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;

4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;

3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;

3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geq 0$;

4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;

3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Решите неравенство (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;

4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$;

§9. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

В 7 классе вы познакомились с понятием функция. Напомним это понятие.

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на множестве задана *функция* $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом, а y - зависимой переменной* или *функцией.*

Вы знакомы с линейной функцией $y=kx+b$ *и квадратичной функцией* $y=ax^2+bx+c$. Для этих функций значение аргумента может быть любым действительным числом.

Рассмотрим теперь функцию, которая каждому неотрицательному числу x сопоставляет число $\sqrt{x}$, то есть функцию $y=\sqrt{x}$. Для этой функции аргумент может принимать только неотрицательные значения: $x\geq0$. В этом случае говорят, что функция определена на множестве всех неотрицательных чисел, и это множество называют *областью определения* функции $y=\sqrt{x}$.

Вообще *областью определения* функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Например, функция, заданная формулой, $y=\frac{1}{x}$, определена при $x \neq 0$, то есть область определения этой функции – множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, то есть выполнены все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

Найти область определения функции, заданной формулой, – это значит найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

Задача 1. Найдите область определения функции:

1) $y(x)=2x^2+3x+5$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\frac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$.

△ 1) Так как выражение $2x^2+3x+5$ имеет смысл при любом x, то функция определена при всех значениях x.

Ответ: x – любое число.

2) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x-1\geq 0$, то есть функция определена при $x\geq 1$.

Ответ: $x\geq 1$.

3) Выражение $\frac{1}{x+2}$ имеет смысл при $x+2\neq 0$, то есть функция определена при $x\neq -2$.

Ответ: $x\neq -2$.

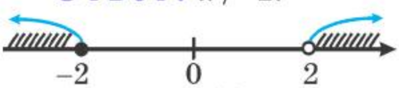


Рис. 28.

4) Выражение $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ имеет смысл при $\frac{x+2}{x-2}\geq 0$. Решив это уравнение, получим: $x\leq -2$ и $x>2$, то есть функция определена при $x\leq -2$ и $x>2$ (рис. 28).

Ответ: $x\leq -2$, $x>2$. ▲

Напомним, что графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты – соответствующим значениям функции.

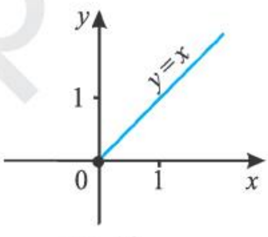


Рис. 29.

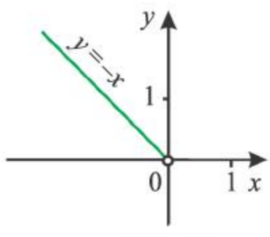


Рис. 30.

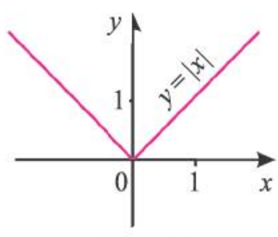


Рис. 31.

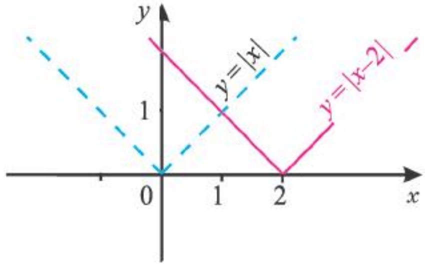


Рис. 32.

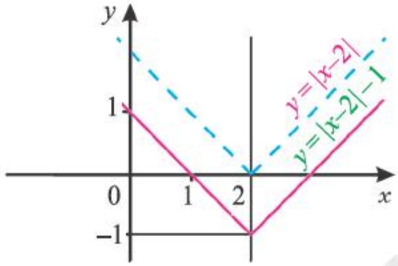


Рис. 33.

Задача 2. Найдите область определения и постройте график функции $y = |x|$.

△ Напомним, что:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x^4 \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, выражение $|x|$ имеет смысл при любом действительном значении x, то есть областью определения функции $y = |x|$ является множество всех действительных чисел.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, и поэтому при $x \geq 0$ графиком функции $y = |x|$ является биссектриса первого координатного угла (рис. 29).

Если $x < 0$, то $|x| = -x$, то есть для отрицательных x графиком функции $y = |x|$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 30).

График функции $y = |x|$ изображен на рисунке 31. ▲

Заметим, что $|-x| = |x|$ для любого x. Поэтому график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат.

Задача 3. Постройте график функции $y = |x-2| - 1$.

△ График функции $y = |x-2|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо (рис. 32).

Для получения графика функции $y = |x-2| - 1$ достаточно сдвинуть график функции $y = |x-2|$ на единицу вниз (рис. 33). ▲

Упражнения

81. Функция задана формулой $y(x) = x^2 - 4x + 5$.

1) Найдите $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$;

2) найдите значение x, если $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$.

82. Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$.

1) Найдите $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$;

2) найдите значение x, если $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$.

Найдите область определения функции (**83–84**):

83. (Устно).

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 2) $y = 2 - x - 3x^2$; 3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y = \dfrac{3}{5-x^2}$; 5) $y = \sqrt[4]{6-x}$; 6) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y = \dfrac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^2-7x+10}$;

3) $y = \sqrt[3]{3x^2-2x+5}$; 4) $y = \sqrt[6]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{4-x}}$.

85. Функция задана формулой $y(x) = |2-x| - 2$.

1) Найдите $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$;

2) найдите значение x, если $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$.

86. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

3) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}}$.

5) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$; 6) $y = \sqrt[8]{\dfrac{x^2+4x-5}{x-2}}$.

87. Принадлежит ли точка (−2; 1) графику функции:

1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;

3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Постройте график функции:

1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;

4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. График функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки A (0; 1), B (1; 2), C ($\frac{5}{6}$; 1). 1). Найдите a, b, c. 2) При каких значениях x $y = 0$? 3) Постройте график функции.

§10. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Вы знакомы с функциями $y = x$ и $y = x^2$. Эти функции являются частными случаями *степенной функции*, то есть

$$y=x^r \tag{1}$$

(здесь r – заданное число).

Пусть r – натуральное число, $r = n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае получим степенную функцию $y = x^n$ с натуральным показателем.

Эта функция определена на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то есть функция $y=x^n$ с натуральным показателем определена при $x\in\boldsymbol{R}$. Если в формуле (1) $r = -2k$, $k\in\boldsymbol{N}$, то приходим к функции $y=x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$. Эта функция определена при значениях x, отличных от нуля. Ее график симметричен относительно оси Oy. Если $r = -(2k-1)$, $k\in\boldsymbol{N}$, приходим к функции $y=x^{-(2k-1)}=\frac{1}{x^{2k-1}}$. Ее свойства аналогичны свойствам функции $y=\frac{1}{x}$. Пусть p и q – натуральные числа и $r=\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Область определения функции $y=\sqrt[q]{x^p}$ зависит от четности p и q. Например, функции $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ определены для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Функция $y=\sqrt[4]{x^3}$ определена при неотрицательных значениях x, то есть при $x \geq 0$.

Из курса „Алгебры“ 8-го класса известно, что для каждого иррационального числа можно найти его приближение рациональным числом с любой степенью точности. На практике действия над иррациональными числами заменяются действиями над их рациональными приближениями. Эти действия определяются таким образом, чтобы свойства этих операций над рациональными числами полностью сохранились и для иррациональных чисел.

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ – рациональные приближения иррационального числа r. Тогда, если x – положительное число, то числа $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_k}, \ldots$ будут последовательными приближениями числа x^r. Такое определение степени называют *степенью с иррациональным показателем* r и обозначают x^r. Таким образом, при $x > 0$ можно определить функцию $y = x^r$ с произвольным действительным показателем r.

Степенная функция определяется для тех значений x, при которых формула (1) имеет смысл. Например, областью определения функций $y = x$ и $y = x^2$ ($r = 1$ и $r = 2$) является множество всех действительных чисел; областью определения функции $y=\frac{1}{x}$ ($r = 1$) является множество всех действительных чисел, не равных нулю; областью определения функции $y=\sqrt{x}$ ($r=\frac{1}{2}$) является множество всех неотрицательных действительных чисел.

Напомним, что функция $y(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любых x_1, x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на некотором промежутке, если для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, из $x_2>x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$.

Например, функция $y = x$ возрастает на числовой оси. Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geq 0$, и убывает на промежутке $x \leq 0$.

Возрастание или убывание степенной функции $y = x^r$ зависит от знака показателя степени r.

Если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geq 0$.

Пусть $x_2 > x_1 \geq 0$. Возведя неравенство $x_2 > x_1$ в положительную степень r, получаем $x_2^r > x_1^r$, то есть $y(x_2) > y(x_1)$.

Например, функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастают на промежутке $x \geq 0$. Графики этих функций изображены на рисунке 34. Из этого рисунка видно, что график функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит выше графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ – ниже графика функции $y = x$.

Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $0 < r < 1$.

График функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ на промежутке $0 < x < 1$ лежит ниже графика функции $y = x$, а на промежутке $x > 1$ – выше этого графика.

Таким же свойством обладает график функции $y = x^r$, если $r > 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $r < 0$.

Если $r < 0$, то степенная функция $y = x^r$ *убывает* на промежутке $x > 0$.

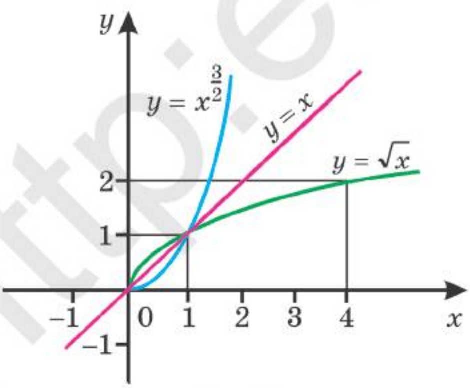


Рис. 34.

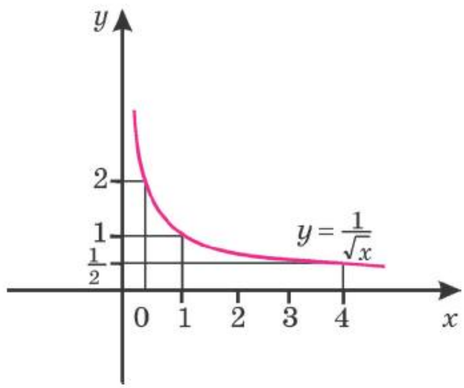


Рис. 35.

○ Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Возведя неравенство $x_2 > x_1$ в отрицательную степень r, по свойству неравенств, у которых левая и правая части положительны, получаем $x_2^r > x_1^r$, то есть $y(x_2) < y(x_1)$. ●

Например, функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то есть $y = x^{-\frac{1}{2}}$ убывает на промежутке $x>0$. График этой функции изображен на рисунке 35.

Задача 1. Решите неравенство $x^{\frac{3}{4}} = 27$.

△ Функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ определена при $x \geq 0$. Поэтому данное уравнение может иметь только неотрицательные корни. Один такой корень есть: $x = 27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{3^3}\right)^4 = 3^4 = 81$. Других корней нет, так как функция $y = x^{\frac{3}{4}}$ возрастает при $x \geq 0$, и поэтому если $x>81$, то $x^{\frac{3}{4}} > 27$, если $x<81$, то $x^{\frac{3}{4}} < 27$ (рис. 36). ▲

Аналогично доказывается, что уравнение $x^r = b$, где $r \neq 0$, $b>0$ всегда имеет положительный корень $x = b^{\frac{1}{r}}$, причем только один. Следовательно, функция $y=x^r$, где $r>0$, при $x>0$ *принимает все положительные значения.*

Это означает, например, что несмотря на медленное возрастание функции $y = x^{\frac{3}{4}}$ (рис. 36), ее график как угодно далеко удалится от оси Ox и пересечет прямую $y = b$ при любом положительном b.

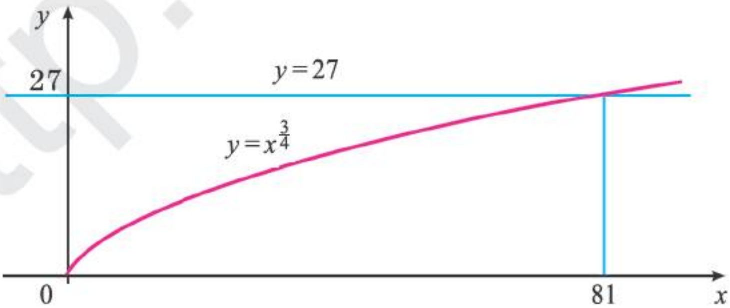


Рис. 36.

Задача 2. Докажите, что функция $y = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$.

△ Пусть $x_2 > x_1 > 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$.
Рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1)$:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

Так как $x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$, $x_1 x_2 > 0$. Поэтому $y(x_2) - y(x_1) > 0$, то есть $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Упражнения

90. Постройте график функции и найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 3 - x^2$; 5) $y = (1 - x)^2$; 6) $y = (2 + x)^2$.

91. (Устно). Возрастает или убывает на промежутке $x > 0$ функция:

1) $y = x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{\sqrt{3}}$?

92. Начертите эскиз графика функции при $x > 0$:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

93. Найдите положительный корень уравнения:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$;
5) $x^{\frac{5}{6}} = 32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}} = 81$; 7) $x^{\frac{1}{3}} = 8$; 8) $x^{\frac{4}{5}} = 16$.

94. Постройте на миллиметровой бумаге график функции $y = \sqrt[4]{x}$. Найдите по графику приближенно:

1) значения x, при которых $y = 0{,}5$; 1; 4; $2{,}5$;

2) значения $\sqrt[4]{1{,}5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2{,}5}$; $\sqrt[4]{3}$.

95. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$ и $y = 625$; 2) $y = x^{\frac{6}{5}}$ и $y = 64$;

3) $y = x^{\frac{3}{2}}$ и $y = 216$; 4) $y = x^{\frac{7}{3}}$ и $y = 128$.

96. Докажите, что функция:

1) $y = x + \frac{1}{x}$ убывает на интервале $0 < x < 1$;

2) $y = \frac{1}{x^2+1}$ убывает на промежутке $x \geq 0$ и возрастает на промежутке $x \leq 0$;

3) $y = x^3 - 3x$ возрастает на промежутках $x \geq -1$ и $x \geq 1$, убывает на отрезке $-1 \leq x \leq 1$;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $x \geq 1$ убывает на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

97. Постройте график функции и найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = \begin{cases} \text{если } x \leq -1, \\ \text{если } x > -1, \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \text{если } x \leq 1, \\ \text{если } x > 1, \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -x - 1, \text{ если } x < -1, \\ -x^2 + 1, \text{если } x \geq -1, \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x^3, \text{ если } x \leq 1, \\ -x^2 + 2x, \text{ если } x \geq 1, \end{cases}$

§11. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вы знаете, что графики функций $y = x^2$ и $y = |x|$ (рис. 37 и 38) симметричны относительно оси ординат. Такие функции называют *четными функциями*.

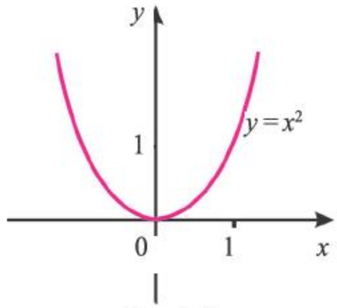


Рис. 37.

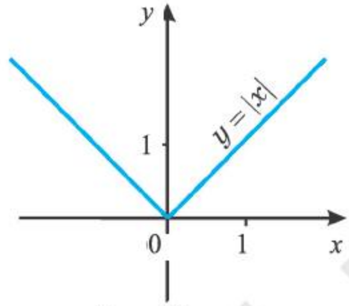


Рис. 38.

Функция $y(x)$ называется *четной*, если

$$y(-x) = y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y = x^4$ и $y = \frac{1}{x^2}$ – четные, так как $(-x)^4 = x^4$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ для любого $x \neq 0$.

Задача 1. Докажите, что график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат и постройте его.

△ 1) Область определения функции $y = x^3$ – множество всех действительных чисел.

2) Значения функции $y = x^3$ положительны при $x > 0$, отрицательны при $x < 0$, при $x = 0$ $y = 0$.

○ Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^3$, то есть $y_0 = x_0^3$. Точка, симметричная точке $(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет координаты $(-x_0; -y_0)$. Эта точка также принадлежит графику функции $y = x^3$, так как умножая обе части верного равенства $y_0 = x_0^3$ на -1 получаем: $-y_0 = -x_0^3$ или $-y_0 = (-x_0)^3$. ●

Это свойство позволяет для построения графика функции $y = x^3$ построить сначала график для $x \geq 0$, а затем отразить его симметрично относительно начала координат.

3) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Это следует из свойств возрастания степенной функции с положительным

основанием при $x \geq 0$ и симметрии графика этой функции относительно начала координат.

4) Составив таблицу значений функции $y=x^3$ для некоторых значений $x \geq 0$ (например, $x = 0, 1, 2, 3$), построим часть графика для значений $x \geq 0$ и затем с помощью симметрии – ту его часть, которая соответствует отрицательным значениям (рис. 39). ▲

Функции, графики которых симметричны относительно начала координат, называются *нечетными*. Таким образом, $y=x^3$ – нечетная функция.

Функция $y(x)$ называется *нечетной*, если

$$y(-x) = -y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y=x^5$, $y=\frac{1}{x^3}$ нечетные, так как $(-x)^5= -x^5$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}$ для любого $x \neq 0$.

Отметим, что и у четной, и у нечетной функции *область определения симметрична относительно начала координат.*

Существуют функции, которые не обладают свойствами четности или нечетности. Например, покажем, что функция $y = 2x + 1$ не является четной и не является нечетной. Если бы эта функция была четной, то равенство $2(-x)+1 = 2x + 1$ выполнялось бы для всех x, но при $x = 1$ это равенство неверно: $-1 \neq 3$. Если бы эта функция была нечетной, то тогда при всех значениях x выполнялось бы равенство $2(-x) +1= -(2x +1)$, но например, при $x=2$ это равенство неверно: $-3 \neq -5$.

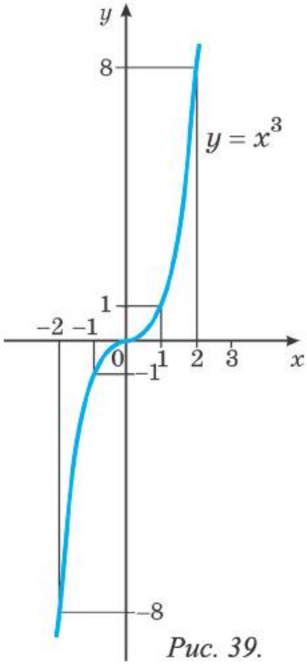


Рис. 39.

Задача 2. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x}$.

△ 1) Область определения – все действительные числа.

2) Функция нечетная, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ для любого x.

3) При $x \geq 0$ функция возрастает по свойству возрастания степенной функции с положительным показателем, так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geq 0$.

4) При $x > 0$ значения функции положительны; $y(0) = 0$;

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику функции, например, (0; 0), (1; 1), (8; 2), построим часть графика для значений

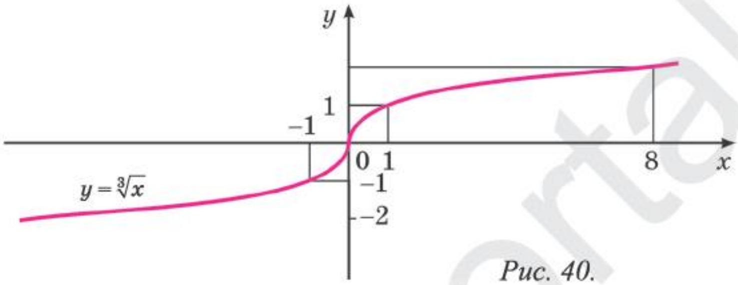


Рис. 40.

$x \geq 0$ и затем с помощью симметрии – часть графика для значений $x < 0$ (рис. 40). ▲

Отметим, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена при всех x, а функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ только при $x \geq 0$.

Упражнения

Выясните, является ли функция четной или нечетной (**98–99**):

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Постройте эскиз графика функции:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. Покажите, что функция не является четной и не является нечетной.

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Выясните, является ли функция четной или нечетной:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Используя симметрию, постройте график четной функции:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

104. Используя симметрию, постройте график нечетной функции:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Выясните свойства функции и постройте график функции:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$.

106. Постройте график функции:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\geq 0, \\ x^3, \text{ если } x<0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, \text{ если } x>0, \\ x^2, \text{ если } x\leq 0; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{ если } x\leq 0, \\ -x^2, \text{ если } x\geq 0; \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^4, \text{ если } x\leq 1, \\ -x^2+2x, \text{ если } x\geq 1. \end{cases}$

Определите, при каких значениях аргумента значения функции положительны. Укажите промежутки возрастания и убывания.

107. Постройте график функции y при $x>0$, если:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

Достройте график каждой функции для $x<0$ так, чтобы построенная линия была графиком: a) четной функции; b) нечетной функции. Задайте формулой каждую из полученных функций.

108. Запишите уравнение оси симметрии каждой функции:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Укажите координаты центра симметрии графика функции:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

§12. НЕРАВЕНСТВА И УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ СТЕПЕНЬ

Свойства степенной функции используются при решении различных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решите неравенство $x^5 > 32$.

△ Функция $y = x^5$ определена и возрастает при всех действительных значениях x. Так как $y(2) = 32$, то $y(x) > 32$ при $x > 2$ и $y(x) < 32$ при $x < 2$.

Ответ: $x > 2$. ▲

Задача 2. Решите неравенство $x^4 \leq 81$.

△ Функция $y = x^4$ убывает при $x \leq 0$ и возрастает при $x \geq 0$. Уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Поэтому неравенство $x^4 \leq 81$ при $x \leq 0$ имеет решения $-3 \leq x \leq 0$ и при $x \geq 0$ – решения $0 \leq x \leq 3$ (рис. 41).

Ответ: $-3 \leq x \leq 3$. ▲

Задача 3. С помощью графиков решите уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$.

Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 42).

△ При $x < 0$ уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$ корней не имеет, так как $\frac{3}{x} < 0$, а $x^2 + 1 > 0$. При $x > 0$ уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций. Из рисунка 42 видно, что $x_1 \approx 1{,}2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x > x_1$ функция $y = \frac{3}{x}$ убывает, а функция $y = x^2 + 1$ возрастает, и следовательно, графики функций при $x > x_1$ не пересекаются. По той же причине они не пересекаются при $0 < x < x_1$.

Ответ: $x_1 \approx 1{,}2$. ▲

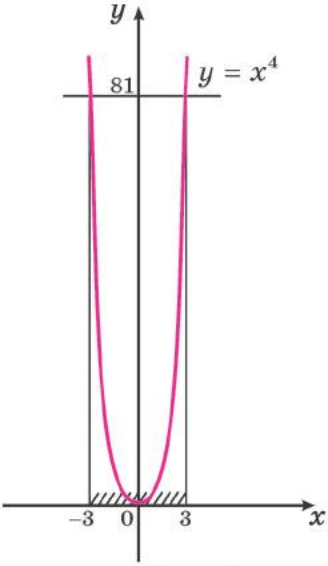


Рис. 41.

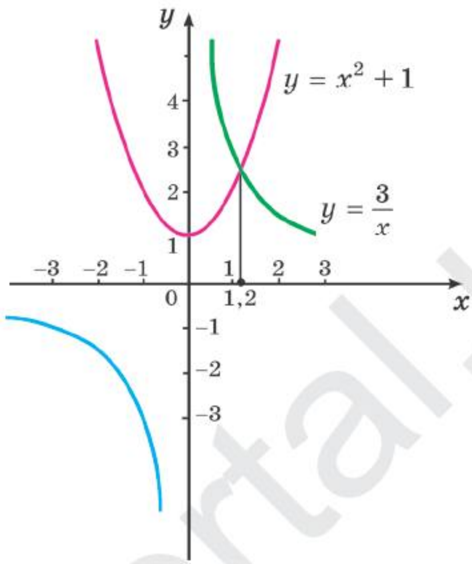


Рис. 42.

Задача 4. Решите уравнение:

$$\sqrt{2-x^2} = x. \qquad (1)$$

△ Пусть x – корень данного уравнения, то есть x – такое число, при котором уравнение (1) обращается в верное равенство. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2-x^2=x^2. \qquad (2)$$

Отсюда $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.

Итак, предположив, что уравнение (1) имеет корни, мы получили, что этими корнями могут быть только числа 1 и −1. Проверим, являются ли эти числа корнями уравнения (1). При $x = 1$ уравнение (1) обращается в верное равенство: $\sqrt{2-1^2} = 1$. Поэтому $x = 1$ – корень уравнения (1).

При $x=-1$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{2-(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, а правая равна −1, то есть $x=-1$ не является корнем уравнения (1).

Ответ: $x=1$. ▲

В рассмотренной задаче уравнение (1) было решено с помощью возведения обеих частей этого уравнения в квадрат. При этом получилось уравнение (2).

Уравнение (1) имеет только один корень: $x=1$, а уравнение (2) – два корня: $x_{1,2}=\pm 1$, то есть при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) появляется так называемый *посторонний корень*. Это происходит потому, что при $x = -1$ уравнение (1) обращается в неверное равенство $1 = -1$, а при возведении обеих частей этого неверного равенства в квадрат получается верное равенство $1^2 = (-1)^2$.

При возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни.

При решении уравнения возведением в квадрат обеих его частей необходимо делать проверку.

Уравнение (1) – пример *иррационального уравнения*.

Приведем еще примеры иррациональных уравнений.

$$\sqrt{3-2x}=1-x;\ \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}.$$

Рассмотрим решение нескольких иррациональных уравнений.

Задача 5. Решите уравнение: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5-2x=x^2-2x+1$$

или $x^2=4$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$. Проверим найденные корни.

При $x = 2$ левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$, а правая часть равна $1 - 2 = -1$. Так как $1 \neq -1$, то $x=2$ не является корнем исходного уравнения.

При $x=-2$ левая часть уравнения равна $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=3$, правая часть равна $1-(-2)=3$. Следовательно, $x=-2$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x=-2$. ▲

Задача 6. Решите уравнение: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Запишем это уравнение в виде $\sqrt{x-2}=-3$.

Так как арифметический корень не может быть отрицательным, то это уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет. ▲

Задача 7. Решите уравнение: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Приведем подобные члены и запишем уравнение в виде:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ или } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ или } x^2-12x+20=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=10$. Проверка показывает, что каждое из чисел 2 и 10 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

Задача 8. Решите уравнение: $\sqrt{5-x}\le 7+x$.

△ Неравенство имеет смысл при значениях x, удовлетворяющих условию $-7\le x\le 5$. Если неравенство имеет решение, то оно принадлежит отрезку $[-7;5]$. Возведем обе части неравенства в квадрат, и после упрощения придем к неравенству $x^2+15x+44\ge 0$. Ясно, что его решение $x\le -11$, $x\ge -4$. Общей частью этого решения с отрезком $[-7;5]$ является $-4\le x\le 5$, то есть отрезок $[-4;5]$:

Ответ: $-4\le x\le 5$. ▲

Упражнения

110. Решите неравенство:

1) $x^7>1$;	2) $x^3\le 27$;	3) $y^3\ge 64$;	4) $y^3<125$;
5) $x^4\le 16$;	6) $x^4>625$;	7) $x^5\le 243$;	8) $x^6\ge 64$.

111. 1) Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см^2?

2) Каким может быть ребро куба, если его объем больше 343 дм^3?

112. (Устно.) Покажите, что число 7 является корнем уравнения:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Устно.) Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Решите уравнение (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;

4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x\quad 6}$;

3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;

4) $\sqrt{0{,}4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

118. Решите неравенство:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;

4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119. Объясните, почему данное уравнение не имеет корней:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;

4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Решите уравнение (**120–122**):

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. При каких значениях x функции принимают одинаковые значения:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}},\ y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}},\ y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\le 1$; 3) $\sqrt{2-x}\ge x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\le x+1$.

Упражнения к главе I

125. Найдите значения x, при которых квадратичная функция $y = 2x^2 - 5x + 3$ принимает значение, равное: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) –1.

126. Решите неравенство:

1) $x^2 \le 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \ge 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;

3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Найдите координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;

3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Постройте график функции и по графику выясните ее свойства:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Периметр прямоугольника 600 м. Какими должны быть его высота и основание, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

131. Найдите коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если эта функция:

1) при $x = 0$ принимает значение 2, а при $x = 1$ – значение 3;
2) при $x = 0$ принимает значение 0, а при $x = 2$ – значение 6.

132. При каких значениях x функции принимают равные значения:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ и $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ и $y = |3x - 3|$?

Решите неравенство (**133–137**):

133. 1) $(x - 5{,}7)(x - 7{,}2) > 0$; 2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2{,}5)(3 - x) < 0$; 4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 > 36$; 3) $4 > x^2$; 4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$; 2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$; 2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$; 4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$; 6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$; 2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;
3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;
6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$; 8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Решите неравенство (**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2 \geq 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1) \leq (x+1)^2$;

3) $x(1-x)>1{,}5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9} \geq x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2}<0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1} \leq 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2} \leq 0$.

140. Катер должен не более чем за 4 часа пройти по течению реки 22,5 км и вернуться обратно. С какой скоростью относительно воды должен идти катер, если скорость течения реки – 3 км/ч?

141. В одной системе координат постройте графики функций и выясните, при каких x значения одной из функций больше (меньше) значений другой, проверьте результат, решив соответствующее неравенство:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$.

Найдите координаты точек пересечения графиков функции (**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$; 3) $y=3x$, $y=\frac{3}{x}$.

143. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

144. Решите неравенство:

1) $x^4 \leq 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5 \leq -32$.

Решите уравнение (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

147. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; 5) $y=\sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x+7}}$; 6) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Выясните, возрастает или убывает функция на указанном промежутке:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}, x>3$; 2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}, x<2$;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}, x\geq 0$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x<-1$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. С помощью графика функции $y = -x^2 + 2x + 3$ найдите те значения x, при которых значение функции равно 3.

2. По графику функции $y=1-x^2$ найдите те значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

3. На каких промежутках функция: 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ возрастает? убывает? Постройте график этой функции.

4. Решите неравенство методом интервалов:

1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Найдите область определения функции:

1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Выясните, является ли функция четной или нечетной:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$;

3) $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$; 4) $y=x^7+x^5+1$.

150. Решите неравенство:

1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\le 32$; 3) $(x^2-5x)^5>216$.

151. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}$.

152. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 2) $\sqrt{x^2-3x}<2$; 3) $\sqrt{3x-2}>x-2$;

4) $\sqrt{2x+1}\le x-1$; 5) $\sqrt{3-x}>1-x$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>4-x$.

Тестовые упражнения к главе I

К тестовым упражнениям даны 4 „ответа“. Из 4-х „ответов“ только один верный, а остальные неверные. Учащимся нужно найти (отметить) верный ответ, решив тестовые задания или при помощи других размышлений.

1. Найдите значение a, для которого одна из точек пересечения параболы $y = ax^2$ с прямой $y=5x+1$ имеет абсциссу $x = 1$.

A) $a = 6$; B) $a = -6$; C) $a = 4$; D) $a = -4$.

Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4$.

A) $(-1; 3)$; B) $(3; 1)$; C) $(1; 3)$; D) $(0; 4)$.

3. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

A) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(\frac{1}{2}; 0)$, $(0; 1)$; B) $(-\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(1; 0)$;

C) $(0; \frac{1}{3})$, $(0; \frac{1}{2})$, $(0; 1)$; D) $(\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; -1)$.

Найдите координаты вершины параболы (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; –4); D) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) (–3; –4); B) (–5; –1); C) (–1; –5); D) (3; 4).

6. Напишите уравнение параболы, которая пересекает ось абсцисс в точках $x=1$ и $x=2$, а ось ординат в точке $y=\frac{1}{2}$.

A) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; B) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$;

C) $y = x^2 - 3x + 2$; D) правильный ответ не приведен.

В каких четвертях расположена парабола? (**7–8**):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

A) I, II, III; B) II, III, IV; C) I, III, IV; D) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

A) III, IV; B) I, II, III; C) II, III, IV; D) I, II.

9. Сумма двух положительных чисел равна 160. Найдите эти числа, если сумма их кубов имеет наименьшее значение.

A) 95; 65; B) 155; 5; C) 75; 85; D) 80; 80.

10. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 3$.

A) –1; B) 1; C) 7; D) –8.

Решите неравенство (**11–17**):

11. $2x^2-8\le 0$.

A) $-2\le x\le 2$; B) $-2\le x$; C) $x\ge 2$; D) $0\le x\le 4$.

12. $3x^2-9\ge 0$.

A) $x < \sqrt{3}$; B) $x > \sqrt{3}$; C) $x < -\sqrt{3},\ x > \sqrt{3}$; D) $x \ge 3$.

13. $6x^2+5x-6>0$.

A) $x > \frac{2}{3}$; B) $x < \frac{3}{2}$; C) $x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$.

14. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-3x-10} \le 0.$

A) $-2<x\le 2;$ B) $-2< x <5;$ C) $x\ne -2,\ x\ne 5;$ D) $-2<x<0.$

15. $\dfrac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \ge 0.$

A) $-2<x<3;$ B) $x<-2;\ -1\le x\le 1,\ x>3;$

C) $-1\le x<3;$ D) $x\ne -2,\quad x\ne 3.$

16. Найдите сумму всех целых решений неравенства $x^2+6x+5<0.$

A) 10; B) 9; C) –9; D) –10.

17. При каких значениях a неравенство $ax^2+4x+9a<0$ будет верным при всех значениях x?

A) $a<-\dfrac{2}{3};$ B) $a>\dfrac{2}{3};$ C) $a<-1;$ D) $a>1.$

18. При каких значениях a неравенство $ax^2-8x-2<0$ верно при всех значениях x?

A) $-8<a<8;$ B) $a\ge 8;$ C) $a<8;$ D) $a<-8.$

19. Найдите область определения функции: $y=\sqrt{-x^2+3x-2}.$

A) $1\le x\le 2;$ B) $1<x<2;$ C) $x\ge 2,\ x\le 1;$ D) $-2\le x\le -1.$

20. Какие из функций четные?

1) $y=x+\dfrac{1}{x};$ 2) $y-x^2+|x|;$ 3) $y=-3+\dfrac{5}{x^4};$ 4) $y=x^2-\dfrac{3}{x}.$

A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.

21. Какие из функций нечетные?

1) $y=6x;$ 2) $y=\sqrt[3]{x};$ 3) $y=4x+7;$ 4) $y=2x^3-10.$

A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.

Практические и межпредметные задачи

Задача 1. Легковой автомобиль двигался с постоянной скоростью v. Когда до стоп-линии оставалось 50 метров, зеленый сигнал светофора начал мигать. Спустя полсекунды водитель начал торможение и остановился до стоп-линии. Как известно из правил дорожного движения, тормозной путь автомобиля, двигающегося со скоростью $v_0 = 50$ км/ч, равен $S_0 = 23{,}5$ м, здесь тормозной путь это путь, пройденный автомобилем от начала торможения до полной остановки. Найдите скорость v, с которой двигался автомобиль, в момент когда начал мигать светофор.

△ После того, как начал мигать светофор и до начала торможения, автомобиль проехал путь, равный $0{,}5\ v$, затем – тормозной путь, который, как известно из курса физики, равен kv^2, где

$$k = \frac{s_0}{v_0^2} = \frac{23{,}5}{13{,}88^2} \approx 0{,}12.$$

Следовательно, общее пройденное расстояние, учитывая, что 50 км/ч равно 13,88 м/с, а также исходя из условия задачи – путь не должен превышать 50 м, получим

$$0{,}5v + 0{,}12v^2 \le 50,$$

то есть

$$0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 \le 0. \qquad (1)$$

△ Для решения данного неравенства, сначала найдем нули трехчлена $0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50$:

$$0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 = 0,$$

откуда

$$12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Решим уравнение:

$$v_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 12(-5000)}}{2 \cdot 12} = \frac{-25(1 \pm \sqrt{97})}{12},$$

откуда $v_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ и $v_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Таким образом, решением неравенства (1) является промежуток $v_1 \le v \le v_2$. Однако, по условию задачи, $v > 0$, следовательно, искомая скорость v будет удовлетворять неравенству $0 < v \le v_2$, т.е. $v \le \frac{-25(1 \pm \sqrt{97} - 1)}{12} \approx 18{,}43$ м/с или 66,35 *км/ч*.

Ответ: Скорость не должна превышать 66,35 км/ч. ▲

Задача 2. Предположим, что на базаре имеется n штук определенного товара, и этот товар продается по цене p сумов за единицу. Мониторинг показал, что при увеличении спроса на данный товар, его цена увеличивается, а количество привозимых товаров увеличивается по формуле $n = 40p$. С другой стороны, с увеличением количества n товара, привозимого на базар, его цена уменьшается в обратно пропорциональной зависимости:

$$p = \frac{150}{n - 40}.$$

Определите условия, накладываемые на количество привозимого на базар товара.

△ Для решения используем то, что по условию задачи, предлагаемая цена $\frac{150}{n-40}$ не должна быть меньше $\frac{n}{40}$:

$$\frac{150}{n-40} \ge \frac{n}{40}.$$

Откуда получаем неравенство

$$n^2 - 40n - 6000 \le 0.$$

Решением будет: $-60 \le n \le 100$. Из условий задачи следует, что количество привозимого товара n – натуральное число, меньшее 100.

Ответ: $n \le 100$. ▲

Задача 3. Вы хотите выложить каменную дорожку по двум сторонам своего сада, размер которого 7 на 18 метров (рис. 43). Однако, вы можете использовать количество материала, которого хватит на дорожку площадью до 54 квадратных метров. Какова максимально возможная ширина такой дорожки?

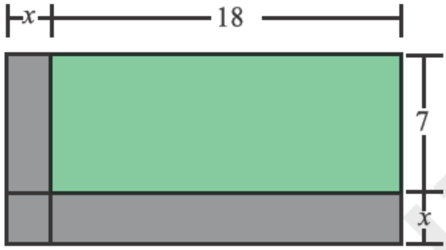


Рис. 43

△ Очевидно, для решения задачи, нам следует из общей площади $(x + 18) \cdot (x + 7)$ кв.м. вычесть площадь $18 \cdot 7 = 126$ кв.м., а результат не должен превышать 54 кв.м.:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \quad (1)$$

Откуда получаем квадратное неравенство

$$x^2+25x-54 \leq 0 \quad (2)$$

$x_1 = -27$ и $x_2 = 2$ – корни квадратного трехчлена $x^2+25x-54$, тогда $-27 \leq x \leq 2$ – решение неравенста (2). Однако, по условию задачи, ширина дорожки x не может быть отрицательным числом или нулем. Значит, ширина дорожки x будет являтся числом, удовлетворяющим неравенству $0 < x \leq 2$. То есть ширина дорожки не должна превышать 2 м.

Ответ: максимально возможная ширина дорожки 2 м. ▲

Задачи

1. Грузовая машина двигалась с постоянной скоростью v. Когда до стоп-линии оставалось 50 метров, зеленый сигнал светофора начал мигать. Спустя полсекунды водитель начал торможение и остановился до стоп-линии. Как известно из правил дорожного движения, тормозной путь грузовой машины, двигающейся со скоростью $v_0 = 50$ *км/ч*, равен $S_0 = 28{,}9$ м. Оцените скорость v грузового автомобиля в тот момент, когда начал мигать светофор, с точностью до 0,01.

2. Предположим, что на базаре имеется n штук определенного товара, и этот товар продается по цене p сум за единицу. Мониторинг показал, что при увеличении спроса на данный товар, его цена увеличивается, а количество привозимых товаров увеличивается по формуле $n = 60p$. С другой стороны, с увеличением количества n товара, привозимого на базар, его цена уменьшается в обратно пропорциональной зависимости:

$$p = \frac{60}{n-40}.$$

Определите условия, накладываемые на количество привозимого на базар товара.

3. Предположим, что компания тратит на рекламу x (в сотнях тысяч) сумов и в результате получает прибыль P, где $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Сколько нужно затратить на рекламу, чтобы прибыль была максимальной?
4. Месячная прибыль небольшой производственной компании выражается равенством $P = 250n - n^2$ (в тысячах сум), где n – количество произведенного и проданного товара. Сколько товара в месяц следует производить и продавать компании, чтобы прибыль была максимальной?
5. В одном из тропических лесов Южной Америки было найдено уникальное насекомое и специалист по изучению окружающей среды переселил это насекомое на защищаемую территорию. Через t месяцев после перевода число насекомых стало увеличиваться по закону

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t).$$

Найдите:

1) Каким было число насекомых при $t = 0$?
2) Каким будет их число через 10 лет?
3) Через какое время их число будет равным 549?

Исторические сведения

Абу Райхон Беруни (973–1048)

Слово „функция“ происходит от латинского слова „*functio*“ – исполнение, осуществление. Первые определения функции принадлежат **Г.Лейбницу** (1646–1716), **И.Бернулли** (1667–1748), **Н.И.Лобачевскому** (1792–1856).

Древние ученые, не владея современным понятием функции, ясно представляли себе характер функциональной зависимости между переменными величинами.

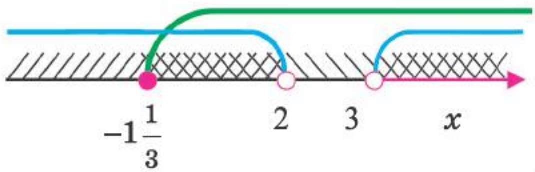
За 4000 лет до наших дней в Древнем Вавилоне пользовались, пусть и грубо приближенной, формулой для площади круга радиуса r – $S=3r^2$.

Ранние сведения о степенях чисел сохранились на вавилонских клинописных табличках. В частности, имеются таблицы квадратов и кубов чисел.

Таблицы квадратов и кубов чисел, таблицы логарифмов и тригонометрические таблицы – все это примеры функциональной зависимости, заданной в табличной форме.

Великий ученый-энциклопедист **Абу Райхан Беруни** широко пользовался в своих трудах понятием функциональной зависимости. В 6-й главе своего фундаментального руководства по астрономии «Канон Масуда» он определяет промежутки изменения аргумента и функции, наибольшие и наименьшие значения функции.

ГЛАВА II. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ



§13. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{13}$ см, а его площадь 3 см^2. Найдите катеты треугольника.

△ Пусть катеты треугольника равны x и y сантиметров. Запишем условия задачи, пользуясь теоремой Пифагора и формулой вычисления площади прямоугольного треугольника:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Прибавляя к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 4, получаем:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

откуда $(x + y)^2 = 25$ или $x + y = \pm 5$. Так как x и y – положительные числа, то $x + y = 5$. Выразим из этого уравнения y через x и подставим это значение в одно из уравнений системы (1), например во второе:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Решим полученное уравнение:

$$5x - x^2 = 6,\ \ x^2 - 5x + 6 = 0,\ \ x_1 = 2,\ \ x_2 = 3.$$

Подставив эти значения в формулу $y = 5 - x$, находим $y_1 = 3$, $y_2 = 2$. В обоих случаях один из катетов равен 2 см, а другой 3 см.

Ответ: 2 см, 3 см. ▲

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ По теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

Решая это уравнение, получаем: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Следовательно, решениями системы являются две пары чисел: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Ответ: (5; –2), (–2; 5). ▲

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

△ Эту систему уравнений решим способом подстановки:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Упростив это уравнение, получим: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. Подставляя значения x в формулу $y = 3x - 6$, находим $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$.

Ответ: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Запишем первое уравнение системы так:

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Подставляя сюда $x-y=2$, получаем $x+y=8$. Следовательно,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решая эту систему методом сложения, находим $x=5$, $y=3$.

Ответ: (5; 3). ▲

Упражнения

153. Решите систему уравнений первой степени с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=7, \\ x+y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=-11, \\ xy=18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x+y=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2-y^2=-3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x+y=7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=10, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=5, \\ x^2+y^2=26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ xy=7. \end{cases}$

159. Сумма двух чисел равна 18, а их произведение 65. Найдите эти числа.

160. Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое 12. Найдите эти числа.

161. Решите систему уравнений (**161–163**):

1) $\begin{cases} x+2y=-3, \\ y^2-2x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=21, \\ x+y=7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-y^2=46, \\ xy=10. \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x-y)^2=4, \\ x+y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 4+xy=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=4, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$

164. Участок прямоугольной формы нужно огородить забором длиной 1 км. Каковы должны быть длина и ширина участка, если его площадь равна 6 га?

§14. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задача 1. Решите систему уравнений :

$$\begin{cases} x+y+2xy=10, \\ x+y-2xy=-2. \end{cases}$$

△ Почленно складывая уравнения системы, получаем: $2x+2y=8$, откуда $y=4-x$. Это выражение подставляем в одно из уравнений системы, например, во второе:

$$x+4-x-2x(4-x)=-2,$$
$$4-8x+2x^2=-2, \quad 2x^2-8x+6=0,$$
$$x^2-4x+3=0, \quad x_1=1,\ x_2=3.$$

Так как $y=4-x$, то $y_1=3$, $y_2=1$.

Ответ. (1; 3), (3; 1). ▲

Задача 2. Решите систему уравнений :

$$\begin{cases} x-y^2=3, \\ xy^2=28. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения системы $y^2=x-3$. Подставим это выражение во второе уравнение:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0,$$

Откуда $x_1=7$, $x_2=-4$.

Так как $y^2=x-3$, то находим значение y:

1) если $x=7$, то $y^2=7-3$, $y^2=4$, откуда $y=2$ или $y=-2$;

2) если $x=-4$, то $y^2=-4-3<0$, следовательно, действительных корней нет.

Ответ: (7; 2), (7; –2). ▲

Следует также отметить, что если в первом уравнении выразить x через y, и подставить во второе уравнение, это приведет нас к решению биквадратного уравнения.

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Если $(x; y)$ – решение системы, то $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Второе уравнение системы запишем в виде: $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$.

В полученное уравнение подставим $x + y = 12$: $\frac{12}{xy} = \frac{3}{8}$, откуда $xy = 32$.

Решение заданной системы свелось к решению следующей:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, получаем: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 4$.

Ответ: (4; 8), (8; 4). ▲

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Перепишем второе уравнение системы в виде: $xy(x - y) = 2$. Ясно, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, и $x - y \neq 0$, в этом случае, разделив первое уравнение системы на второе, получаем:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{7}{2};$$

$$2(x^2+xy+y^2)=7xy,$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное уравнение относительно x, найдем его корни:

$$x_{1,2}=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y\pm 3y}{4}.$$

Откуда $x_1=2y$ или $x_2=\frac{y}{2}$.

Подставляя во второе уравнение системы найденные значения x через y, получаем:

1) если $x=2y$, то $4y^3-2y^3=2$, откуда $y^3=1$ и $x=2$;

2) если $x=\frac{y}{2}$, то $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, откуда $y^3=-8$, $y=-2$ и $x=-1$.

Ответ: (2; 1), (–1; –2).

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x^3+8y^3=35. \end{cases}$$

Пользуясь формулой суммы кубов, запишем второе уравнение системы так:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Разделим это уравнение на первое уравнение системы и получим: $x+2y=5$.

Из этого уравнения найдем $2y$ через x: $2y=5-x$ и подставим это выражение во второе уравнение:

$$x^3+(5-x)^3=35,$$
$$x^3+125-75x+15x^2-x^3=35,$$
$$15x^2-75x+90=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=3,\ x_2=2.$$

Найдем соответствующие значения y:

1) $2y=5-3$, откуда $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, откуда $y_2=\frac{3}{2}$.

Ответ: (3; 1), $(2; \frac{3}{2})$.

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$, тогда $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$, $t>0$. В этом случае второе уравнение системы примет вид: $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$. Умножим обе части этого уравнения на t:

$$t^2-\frac{5}{6}t-1=0.$$

Откуда $t_{1,2}=\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}+1}=\frac{5}{12}\pm\frac{13}{12}$, $\quad t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{2}{3}$.

Так как $t>0$, то $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$, откуда $x=\frac{9}{4}y$. Подставив выражение для x в первое уравнение системы, получим: $\frac{9}{4}y-y=5$,

$\frac{5}{4}y=5$, $y=4$, поэтому $x=9$.

Ответ: (9; 4).

Упражнения

Решите систему уравнений **(165–175)**:

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

§15. СИСТЕМА НЕРАВЕНСТВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Задача1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \ge 0. \end{cases}$$

△ Первое неравенство этой системы – квадратное, а второе – линейное. Решениями первого неравенства, как показано в задаче 2 **§6,** являются все числа из промежутков $x<2$ и $x>3$. А решения второго неравенства –это все числа из промежутка $x \ge -1\frac{1}{3}$. На одной числовой оси изобразим как решения первого неравенства, так и решения второго неравенства. Ясно, что все числа, расположенные в промежутках

$-1\frac{1}{3} \le x < 2$ и $x < 3$ одновременно удовлетворяют обоим неравенствам системы (рис. 44).

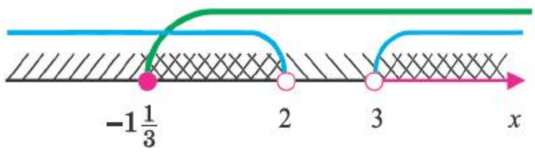


Рис. 44

Ответ: $-1\frac{1}{3} \le x < 2,\ x > 3.$ ▲

Задача 2. Решите неравенство:

$$|x^2 - x - 1| < 1.$$

△ Мы знаем, что неравенство $|x^2 - x - 1| < 1$ равносильно двойному неравенству:

$$-1 < x^2 - x - 1 < 1.$$

А последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Сначала решим первое неравенство: $D = (-1)^2 - 4(-2) = 9 > 0$, следовательно, $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Отсюда получаем, что первому неравенству удовлетворяют все числа из промежутка $-1 < x < 2$.

Решим второе неравенство: $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Следовательно, решениями этого неравенства будут все числа, удовлетворяющие промежуткам: $x < 0$ и $x > 1$. Решения обоих неравенств изобразим на одной числовой оси (рис. 45).

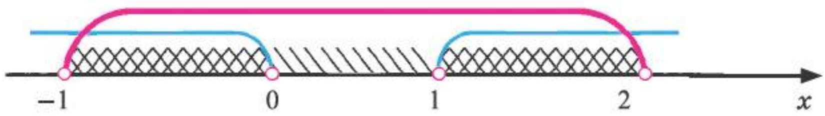


Рис. 45.

Отсюда следует, что решениями исходного неравенства являются все числа, удовлетворяющие промежуткам $-1<x<0$ и $1<x<2$.

Ответ: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

Задача 3. Найдите область определения функции:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

△ Так как выражение под квадратным корнем не может быть отрицательным, то областью определения данной функции являются решения следующей системы:

$$\begin{cases} 3x^2-x-14\geq 0, \\ -x\geq 0. \end{cases}$$

Сначала решим первое неравенство. Так как $D=(-1)^2-4\cdot 3(-14)=169$ – дискриминант квадратного трехчлена $3x^2-x-14$, то $x_1=\frac{1-13}{6}=-2$, $x_2=\frac{1+13}{6}=\frac{7}{3}$. А так как ветви квадратичной функции $y=3x^2-x-14$ направлены вверх, то решения первого неравенства лежат в промежутках $x\leq -2$ и $x\geq \frac{7}{3}$.

Ясно, что если второе неравенство умножить на -1, то его решениями будут все числа из промежутка $x\leq 0$.

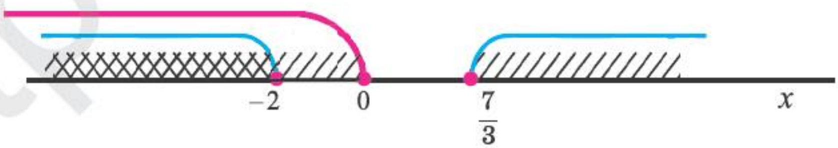


Рис. 46.

Изобразим решения первого и второго неравенств на одной числовой оси (рис. 46).

Откуда получаем, что $x \le -2$ – решение системы.

Ответ. $x \le -2$. ▲

Упражнения

176. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 4x+9>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

177. Решите неравенство:

1) $|x^2-6x|<27$; 2) $|x^2+6x|\le 27$;

3) $|x^2+4x|<12$; 4) $|x^2-4x|\le 12$.

Решите систему неравенств (**178–181**):

178. 1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x-x^2>0, \\ 36-x^2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+x^2<0, \\ 49-x^2>0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2+x+20\le 0, \\ x^2-x-2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x<0, \\ -x^2+x+2\ge 0. \end{cases}$

182. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{-x^2-6x-8}+\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$, 2) $y=\sqrt{x-x^2}-\sqrt{-x^2+12x-35}$.

§16. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОСТЫХ НЕРАВЕНСТВ

Существуют различные способы доказательства неравенств. Рассмотрим применение некоторых из них.

Задача 1. Докажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше среднего геометрического этих чисел.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Докажем это неравенство, *основываясь на определение*, то есть докажем, что $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$.

Преобразовав левую часть этого неравенства, получим:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Непосредственно проверяем, что в соотношении (1) равенство возможно только при $a=b$. ▲

Задача 2. Докажите, что среднее геометрическое двух положительных чисел a и b не меньше среднего гармонического этих чисел.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Докажем это неравенство, используя *вышедоказанное неравенство* (1), а также тот факт, что положительная дробь увеличится, если уменьшить ее знаменатель, не изменяя числитель:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \text{ ▲}$$

Задача 3. Докажите, что для любого положительного a:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3)$$

△ Докажем это неравенство *методом от противного.* Предположим, что неравенство (3) для некоторого положительного a не выполняется, то есть имеет место неравенство

$$a+\frac{1}{a}<2$$

Умножив обе части неравенства на a, получим:

$$a^2+1<2a,$$

то есть $a^2+1-2a<0$ или $(a-1)^2<0$, а это неверное неравенство, так как квадрат любого действительного числа (в том числе и $(a-1)^2$) не отрицательное число. Из полученного противоречия следует, что неравенство (3) верно для любого положительного a. ▲

Задача 4. Продавец взвешивает яблоки на рычажных весах. Покупатель взял 1 кг яблок, а затем попросил продавца поменять местами яблоки и гирю и взвесить еще 1 кг яблок. Кто останется в убытке, если весы не уравновешаны?

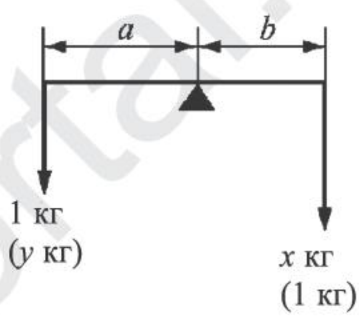


Рис. 47.

△ Предположим, что рычаги весов равны a и b (рис. 47). На рисунке видно, что $a \neq b$. При первом взвешивании покупатель купил x кг яблок. Из курса физика известно, что $x \cdot b = 1 \cdot a$, откуда $x=\frac{a}{b}$. При втором взвешивании покупатель купил y килограмм яблок. Из условия равновесия $y \cdot a = 1 \cdot b$, откуда $y=\frac{b}{a}$. Таким образом, было куплено $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ килограмм яблок.

Пользуясь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом чисел получим $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ следующее:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}>\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}},$$

откуда $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

Ответ: продавец останется в убытке. ▲

Упражнения

183. Докажите, что для любых действительных a, b, x имеет место неравенство:

1) $\frac{a^2+1}{2}\geq a$; 2) $\frac{b^2+16}{4}\geq b$; 3) $\frac{2x}{x^2+1}\leq 1$; 4) $\frac{2x}{4x^2+9}\leq\frac{1}{6}$.

184. Докажите неравенство, если $ab>0$:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$; 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

185. Докажите неравенство, если $a\geq -1$, $a\neq 0$:

$$\frac{4a^2+a+1}{4|a|}\geq\sqrt{a+1}.$$

186. Если $a\geq 0$, $b\geq 0$ и $a\neq b$, то какое из выражений $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ и $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ больше?

187. Докажите неравенство:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6)>96a^2,$$

где $a>0$.

188. Докажите, что если $a>0$, то:

$$\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}.$$

189. Докажите, что если a, b, c, d – положительные числа, то

$$\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}\geq\sqrt{(a+b)(c+d)}$$

190. Докажите, что если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c > 0$, то $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$.

191. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, то имеет место неравенство

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

192. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то имеет место неравенство

$$\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$$

Упражнения к главе II

193. Запишите данное выражение в виде квадратного трехчлена, зависящего от одной переменной:

1) $2y^2 - xy + 3$, если $y = 3x + 1$;

2) $2xy + 3x^2 - 7$, если $x = 2y + 1$.

194. Решите систему уравнений методом замены переменной:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Решите систему уравнений, пользуясь теоремой, обратной теореме Виета:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Двузначное число в три раза больше суммы своих цифр. А квадрат суммы цифр в три раза больше данного числа. Найдите это число.
2) Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр. А квадрат составляет $\frac{3}{2}$ части данного числа. Найдите это число.

206. 1) Отношение сторон двух квадратов равно 5:4. Если сторону каждого квадрата уменьшить на 2 см, то разность площадей получившихся квадратов будет равна 2,8 см^2. Найдите стороны заданных квадратов.
2) Отношение длины прямоугольника к его ширине равно 3:2. Если их увеличить на 1 см, то площадь первого прямоугольника будет на 3 см^2 больше заданного. Найдите длину и ширину первого прямоугольника.

207. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

208. 1) Найдите наименьшее значение $x + y$, если $xy = 9$ и $x > 0$.
2) Найдите наименьшее значение $2a+b$, если $ab = 8$ и $b > 0$.

209. Найдите наименьшее значение выражения:

1) $4x + \frac{81}{25x}$, $(x > 0)$; 2) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$, $x > 0$;

3) $\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}$, $(y > 0)$; 4) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}$.

210. Найдите наибольшее значение xy, если $x + y = 10$ и $x > 0$, $y > 0$.

211. Найдите наибольшее значение xy, если $2x + y = 6$ и $x > 0$, $y > 0$.

212. Докажите неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Тестовые задания к главе II

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

A) $x = -4$, $y = -1$; B) $x = 1$, $y = -4$;
C) $x = 4$, $y = -1$; D) (1; 4) и (4; 1).

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

A) $x = 3$, $y = 1$; B) $x = 5$, $y = -1$;
C) $x = 4$, $y = 0$; D) $x = 1$, $y = 3$.

3. Разность двух чисел равна 3, а их произведение – 28. Найдите эти числа.

A) 7 и 4; B) 5 и 2; C) 14 и 2; D) 11 и 8.

4. Периметр прямоугольника равен 30 м, а площадь – 56 $м^2$. На сколько метров длина прямоугольника больше его ширины?

A) 1,2 м; B) 1 м; C) 2 м; D) 2,5 м.

5. Расстояние в 60 км один велосипедист проезжает на 1 час медленнее. Найдите скорости каждого велосипедиста, если скорость первого велосипедиста на 5 км/ч меньше второго.

A) 20 км/ч, 25 км/ч;		B) 10 км/ч, 15 км/ч;
C) 15 км/ч, 20 км/ч;		D) 12 км/ч, 17 км/ч.

6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$

A) (0,6; 4) и (12; 0,2);		B) (0,4; 6) и (0,12; 2);
C) (4; 0,6) и (12; 0,2);		D) (4; 0,2) и (12; 0,6).

7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$

A) (6; 4) и (4; 3);		B) (–3; 6) и (6; –3);
C) (6; 3) и (3; –6);		D) (6; 3) и (6; –3).

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

A) (–10; 5) и (2; 5);		B) (–10; 2) и (5; 5);
C) (5; –10) и (–10; 2);		D) (5; 5) и (–2; 10).

9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$

A) (4; $\frac{1}{2}$) и (–2; –1);		B) (–2; $\frac{1}{2}$) и (4; –1);
C) (4; 1) и (–4; –2);		D) (–2; –1) и (2; 1).

10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

A) (–1;12);	B) (12;–1);	C) (–1;11);	D) (11;–1).

11. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2+10x-8<0, \\ 2x+9\geq 0. \end{cases}$$

A) $-4<x<\dfrac{2}{3}$; B) $-4,5<x<\dfrac{2}{3}$; C) $x>-4,5$; D) $x<\dfrac{2}{3}$.

12. Решите неравенство: $|x^2+x-1|\leq 1$.

A) $-2\leq x\leq 1,\ 2<x\leq 3$; B) $-2\leq x\leq -1,\ \ 0\leq x\leq 1$;

C) $-1\leq x\leq 0,\ 1<x\leq 2$; D) $x\leq -2,\ \ x\geq 1$.

Практические и межпредметные задачи

Задача. Две грузовые машины, работая вместе, должны были за 6 часов перевезти некоторый груз. Так как вторая машина опоздала, то к началу ее работы первая машина уже перевезла $\dfrac{3}{5}$ части всего груза. Оставшуюся часть груза перевозила только вторая машина. Поэтому на всю работу ушло 12 часов. Сколько времени нужно каждой машине для перевозки всего груза?

△ Примем груз, предназначенный для перевозки за единицу. И пусть первой машине для перевозки всего груза нужно x часов, а второй – y часов. Тогда первая первая машина за час сможет перевозить $\dfrac{1}{x}$ часть груза, а вторая – $\dfrac{1}{y}$ часть.

Работая вместе, они могут за час перевезти $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ часть груза и по условию задачи они должны потратить на это 6 часов. Поэтому

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1.$$

На самом деле первая машина перевезла $\frac{3}{5}$ части груза и затратила на это $\frac{3}{5}$ части своего времени, а вторая перевезла оставшуюся часть груза и затратила на это $\frac{2}{5}$ части своего времени. Учитывая, что в этом случае им потребовалось 12 часов времени, получим второе уравнение:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Для решения задачи нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1,\\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.\end{cases}$$

Преобразовав вначале систему, применим к ней метод замены переменной:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x=60-2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

откуда, $y^2-27y+180=0$,

$$y_{1,2}=\frac{27}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}-180}=\frac{27}{2}\pm\frac{3}{2},\ y_1=15,\ y_2=12.$$

пользуясь формулой $x=-20-\frac{2}{3}y$, получим:

$$x_1=10,\ x_2=12.$$

Ответ : 10 часов и 15 часов, если грузоподъемность машин разная; 12 часов и 12 часов, если их грузоподъемности одинаковы. ▲

Упражнения

1. 1) В одном зрительном зале 420 мест, а во втором – 480. В первом зале по сравнению со вторым на 5 рядов меньше, но в каждом ряду первого зала на 10 мест меньше, чем в каждом ряду второго. Сколько мест имеет каждый ряд первого зала?

2) В красном зале 320 мест, а в синем – 360. В красном зале по сравнению с синим на 2 ряда больше, но в каждом его ряду по сравнению с синим на 4 места меньше. Сколько рядов в красном зале?

2. 1) Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн объемом 80 $м^3$ за некоторое время. Если первый насос увеличит свою производительность в $1\frac{1}{3}$ раза, то ему потребуется для самостоятельного наполнения бассейна на 2 часа больше. Если же будет работать только второй насос, уменьшив свою производительность на 1 $м^3$, то ему потребуется для наполнения бассейна в $3\frac{1}{3}$ раза больше времени (при одновременной работе двух насосов производительность пропорциональна времени). Найдите производительность каждого насоса.

2) Две бригады с различным числом рабочих, имеющих одинаковую квалификацию, изготавливают детали, при этом каждый рабочий за день изготавливает по 2 детали. Вначале работала только первая бригада и изготовила 32 детали. Затем вторая бригада, работая самостоятельно, изготовила еще 48 деталей. На всю эту работу ушло 4 дня. Затем, работая вместе, бригады изготовили 240 деталей. Сколько рабочих в каждой бригаде?

3. 1) Половину товара продали с 10% выгодой, а половину второй половины – с 20% выгодой. С какой выгодой продали оставшуюся четверть товара, если общая выгода от продажи всего товара была больше 12%?

2) Торговая фирма поставляет в магазины товары с добавленной стоимостью: на $\frac{3}{5}$ части товара добавляется надбавка 5%, на половину оставшегося товара – надбавка 4%. Какую надбавку в процентах добавили на вторую половину товара, если надбавка на весь товар составила 7%?

4. 1) Имеется смесь двух веществ. Если добавить в смесь 3 кг второго вещества, его процентное содержание в смеси увеличится в два раза. Если в начальную смесь добавить 3 кг первого вещества, процентное содержание второго вещества уменьшится в два раза. Найдите массу обоих веществ в первоначальной смеси.

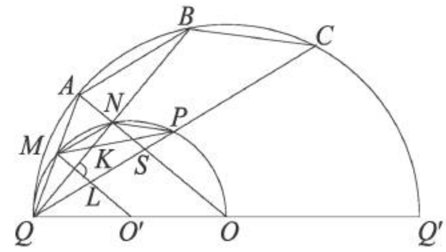
2) Имеется смесь двух жидкостей. Если добавить в смесь 8 литров первой жидкости, ее концентрация в смеси увеличится в два раза. Если в начальную смесь добавить 8 литров второй жидкости, концентрация первой жидкости уменьшится в полтора раза. Найдите объем каждой жидкости.

5. Самолет летел из точки A в точку B по направлению ветра и из точки B в точку A против направления ветра, при этом скорость ветра не менялась. В другой раз самолет пролетел этот маршрут в безветренную погоду. В обоих случаях моторы самолета работали с одинаковой мощностью. В каком случае на полет было затрачено меньше времени?

6. Два трактора могут вспахать поле за p дней. Если первый трактор вспашет одну половину поля, а затем второй трактор вспашет вторую половину поля, то на это потребуется q дней. Докажите, что $q \geq 2p$.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



§17. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром в O радиуса 1 (рис. 48). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой – направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек: ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$ (напомним, что π – иррациональное число, приближенно равное $3{,}14$). Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и так далее.

Таким образом, каждой *точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности*.

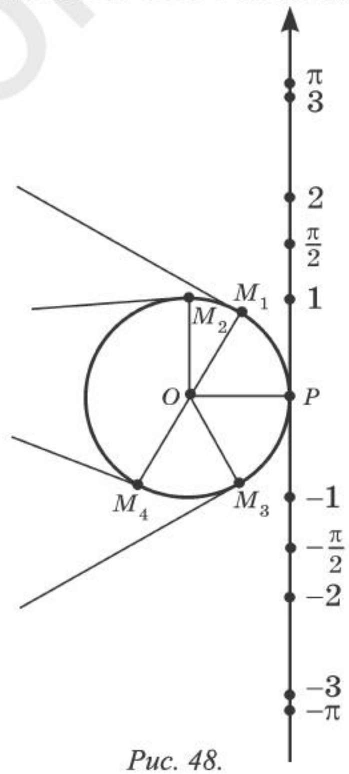


Рис. 48.

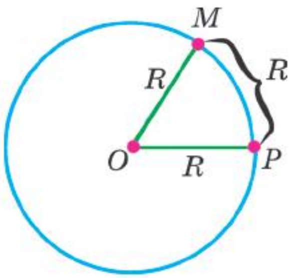


Рис. 49.

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1 то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$, а угол POM_3 – равным –1, угол POM_4 – равным –2. Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы *измеряются в радианной мере*, а угол POM_1 называют углом в 1 *радиан* (1 рад.) Отметим, что длина дуги окружности PM_1 равна радиусу (рис. 48).

Теперь рассмотрим окружность произвольного радиуса R и отметим на ней дугу PM, длина которой равна R, и угол POM (рис. 49).

> ! **Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в* 1 *радиан*.**

В этом случае говорят, что угол в 1 рад стягивает дугу длиной ***R*.**

Найдем градусную меру угла в 1 рад. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол в π раз меньший, то есть

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.}$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна:

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}.} \tag{1}$$

З а д а ч а 1. 1) Найдите градусную меру угла, равного: 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

△ По формуле (1) находим:

1) π рад$=180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90$; 3) . $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 135$.▲

Найдем радианную меру угла в 1°. Так как угол 180° равен π рад, то получаем

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{рад}}$$

.

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\boxed{\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад}} \qquad (2)$$

.

З а д а ч а 2. Найдите радианную меру угла, равного: 1) 45°; 2) 15°.

△ По формуле (2) находим:

1) $45^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{рад} = \frac{\pi}{4} \text{ рад}$; 2) $15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{рад} = \frac{\pi}{12} \text{рад}$. ▲

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и в радианной мере:

Градус	0	30	45	60	90	180
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α радиан стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R \qquad (3)$$

Задача 3. Конец минутной стрелки городских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 0{,}8$ м. Какой путь проходит конец этой стрелки за 15 минут?

△ За 15 минут минутная стрелка поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ радиан. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8 \text{ м} \approx 1{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: 1,3 м. ▲

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R=1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, то есть $l=\alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и других науках.

Задача 4. Докажите, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha,$$

где $0 < \alpha < \pi$.

△ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, то есть $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α радиан равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ▲

Упражнения

213. Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах:

1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;

6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Запишите с точностью до 0,01 число:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$.

216. Сравните числа:

1) $\frac{\pi}{2}$ и 2; 2) 2π и 6,7; 3) π и $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ и 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ и $-\sqrt{10}$.

217. (Устно.) Найдите градусную и радианную меру угла: a) правильного треугольника; b) правильного прямоугольного треугольника; c) квадрата; d) правильного шестиугольника.

218. Вычислите радиус окружности, если дуга длиной 0,36 м стягивает центральный угол в 0,9 радиан.

219. Найдите радианную меру угла, стягиваемого дугой окружности, если длина дуги равна 3 см, а радиус окружности 1,5 см.

220. Дуга кругового сектора стягивает угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найдите площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

221. Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найдите угол, стягиваемый дугой этого кругового сектора.

§ 18. ПОВОРОТ ТОЧКИ ВОКРУГ НАЧАЛА КООРДИНАТ

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем понятие *поворота точки* единичной окружности вокруг начала координат на угол α радиан, где α – любое действительное число.

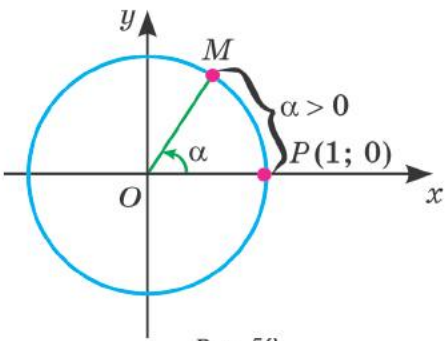


Рис. 50.

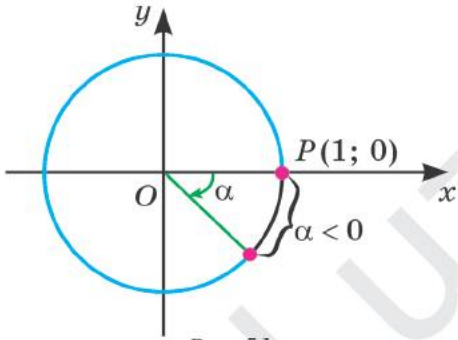


Рис. 51.

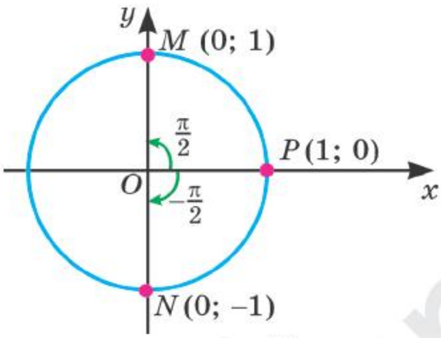


Рис. 52.

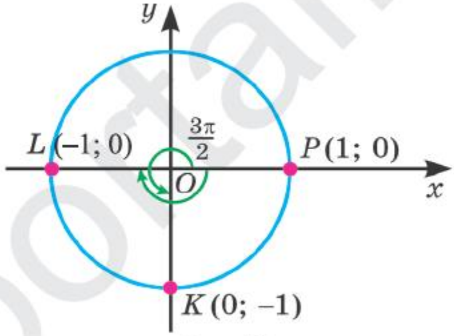


Рис. 53.

1. П у с т ь $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 50). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

2. П у с т ь $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 51).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

Примеры:

1) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад получается точка M с координатами (0; 1) (рис. 52).

2) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад получается точка $N(0;\ -1)$ (рис. 52).

3) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ получается точка $K(0; -1)$ (рис. 53).

4) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $-\pi$ получается точка $L(-1; 0)$ (рис. 53).

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое,

что и поворот на 270°; поворот на угол

$-\frac{\pi}{2}$ – это поворот на –90°.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 54).

Отметим, что при повороте точки $P(1;\ 0)$ на 2π, то есть на 360°, точка возврашается в первоначальное положение (смотрите таблицу). Нри повороте этой точки на -2π, то есть на –360°, она также возвращается в первоначальное положение.

Рассмотрим примеры поворотов на угол, больший 2π и меньший -2π.

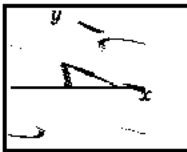
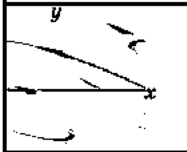
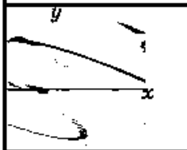
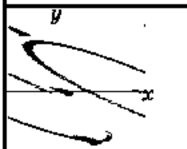
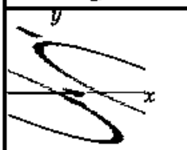
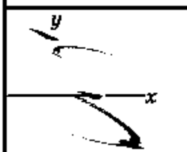
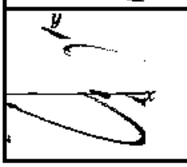
	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

Рис. 54.

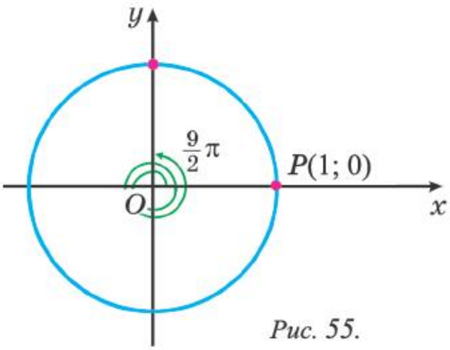


Рис. 55.

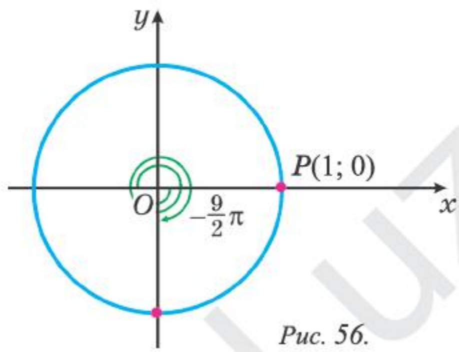


Рис. 56.

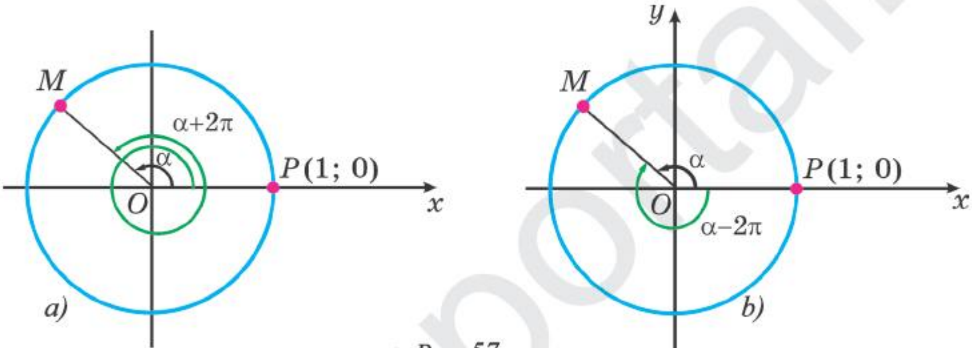


Рис. 57.

Так как при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 55).

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же напрвлении (рис. 56).

Заметим, что при повороте точки $P(1;\,0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 55). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$. (рис. 56).

Вообще, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ (где k – целое число), то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол α радиан.

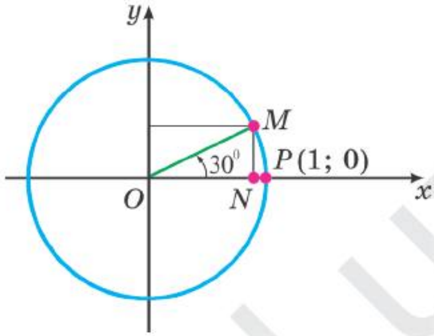


Рис. 58.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки (P(1; 0) в точку M (рис. 57).

Задача 1. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

△ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на угол 7π получается та же точка, что и при повороте на π, то есть точка с координатами (–1; 0).

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на угол $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, то есть получается точка с координатами (0; –1). ▲

Задача 2. Запишите все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

△ Из прямоугольного треугольника NOM (рис. 58) следует, что угол NOM равен $\frac{\pi}{6}$, то есть один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$.

Поэтому, все углы на которые нужно повернуть точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k – любое целое число, то есть $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ ▲

Упражнения

222. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π.

223. На единичной окружности отметьте точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$.

224. Определите четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$.

225. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) $540°$; 6) $810°$; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) $450°$.

226. Запишите все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку: 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 0)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; -1)$.

227. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8.

228. Найдите число x, где $0 \le x \le 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$:

1) $a = 6{,}7\pi$; 2) $a = 9{,}8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$.

229. На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$;
5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π.

230. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол (k – целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$.

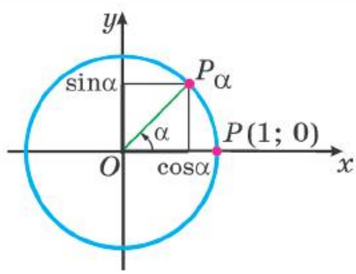
231. Запишите все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА УГЛА

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяется следующим образом:

Определение 1. ***Синусом угла*** α **называется** ***ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол*** α **(обозначается** $\sin\alpha$**).**



О п р е д е л е н и е 2. ***Косинусом угла** α **называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол** α* **(обозначается $\cos\alpha$).**

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть на угол 90° получается точка (0; 1). Ордината точки (0; 1) равна 1, поэтому

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

абсцисса этой точки равна 0, поэтому

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0 .$$

Заметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180°, совпадает с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии.

Например,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos\pi = \cos 180^\circ = -1 .$$

З а д а ч а 1. Найдите $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

△ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку (–1; 0) (рис. 59). Следовательно, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$. ▲

З а д а ч а 2. Найдите $\sin 270^\circ$ и $\cos 270^\circ$.

△ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдет в точку (0; –1) (рис. 60). Следовательно, $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$. ▲

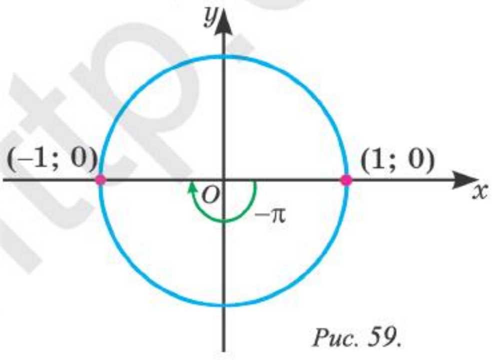


Рис. 59.

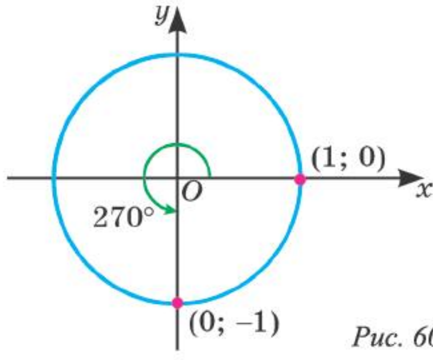


Рис. 60.

Задача 3. Решите уравнение $\sin t = 0$.

△ Решить уравнение $\sin t = 0$ – это значит найти все углы, синус которых равен нулю.

Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: (1; 0) и (–1; 0) (рис.59). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и так далее, а также углы $-\pi$, -2π, -3π и так далее.

Следовательно, $\sin t = 0$ при $t = k\pi$ (где k–любое целое число). ▲

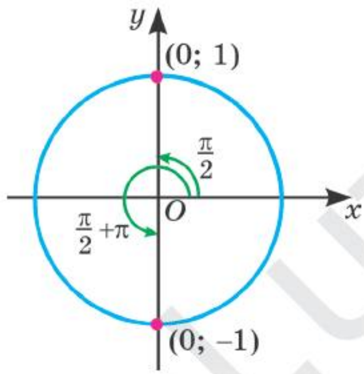


Рис. 61.

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$ используют запись $k \in \boldsymbol{Z}$ (читается „число k принадлежит Z“). Поэтому ответ к задаче 3 можно записать так:

$$t = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 4. Решите уравнение $\cos t = 0$.

△ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: (0, 1) и (0; –1) (рис. 61).

Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ и так далее, а также углы $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ и так далее, то есть на углы $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (где $k \in \boldsymbol{Z}$).

Ответ: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 5. Решите уравнение: 1) $\sin t = 1$; 2) $\cos t = 1$.

△ 1) Ординату, равную 1, имеет точка единичной окружности (0; 1). Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную 1 имеют точки единичной окружности, которые получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: Следовательно, $\sin t = 1$ при $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

$\cos t = 1$ при $t = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Определение 3. ***Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу*** **(обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).**

Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Например, $\operatorname{tg}0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Иногда используется *котангенс угла* α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$). Он определяется формулой $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Например, $\operatorname{ctg}270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$.

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не существует	0	не существует

Задача 6. Вычислите:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

△ Используя таблицу, получаем:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2{,}5.$$ ▲

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырехзначным математическим таблицам В.М.Брадиса, а также с помощью микрокалькулятора.

Если каждому действительному числу x поставить в соответствие $\sin x$, то тем самым на множестве действительных чисел будет задана функция $y=\sin x$. Аналогично задаются функции $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg} x$. Функция $y = \cos x$ определена при всех $x\in \boldsymbol{R}$, функция $y=\operatorname{tg} x$ – при всех $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, функция – $y=\operatorname{ctg}x$ при $x\neq\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ изображены на рисунках 62 и 63. Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ называются *тригонометрическими функциями*.

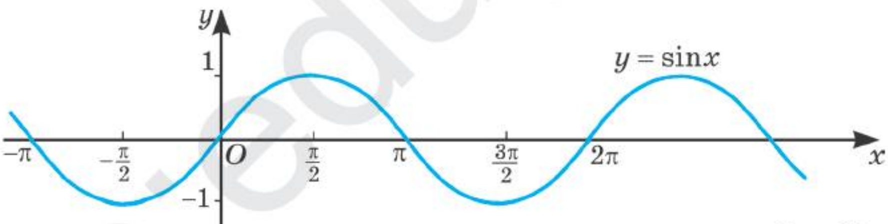


Рис. 62.

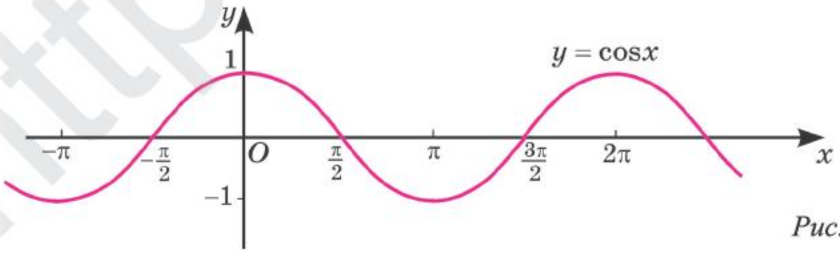


Рис. 63.

Упражнения

232. Вычислите:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углу α, если:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

Вычислите **(234–236)**:

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin0-\cos2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin1{,}5\pi$; 6) $\cos0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}0°-\mathrm{tg}180°$; 3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Решите уравнение:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Устно.) Может ли $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ быть равным:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$?

239. Найдите значение выражения при данном значении α:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, где $\alpha=\frac{\pi}{4}$; | 2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, где $\alpha=60°$;

3) $\sin3\alpha-\cos2\alpha$, где $\alpha=\frac{\pi}{6}$; | 4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, где $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Решите уравнение:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;
4) $\cos 0{,}5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Решите уравнение:

1) $\sin(x+\pi) = -1$; 2) $\sin\frac{1}{2}(x-1) - 0$; 3) $\cos(x+\pi) = -1$;
4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; 5) $\sin 3(x-2) = 0$; 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

§20. ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА

1. Знаки синуса и косинуса

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти, ординаты и абсциссы положительны, поэтому $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 64, 65).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис. 64, 65). Аналогично в третьей четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, а в четвертой четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 64, 65). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Знаки синуса показаны на рисунке 64, а знаки косинуса на рисунке 65.

Если точка (1; 0) движется по часовой стрелке, то *знаки синуса и косинуса* также *определяются тем, в какой четверти окажется точка.*

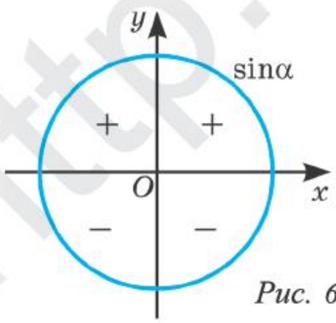


Рис. 64.

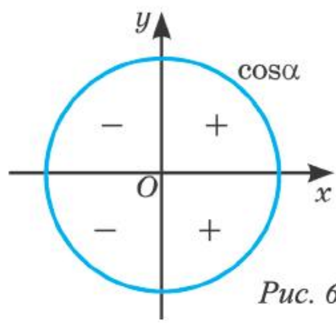


Рис. 65.

Задача 1. Выясните знаки синуса и косинуса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $745°$; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти, поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки $(1; 0)$ на угол $745°$ соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки $(1; 0)$ на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲

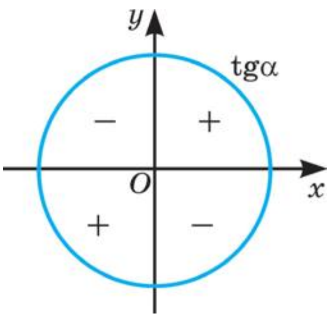


Рис. 66.

2. Знаки тангенса

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса изображены на рисунке 66.

Знаки $\operatorname{ctg}\alpha$ совпадают со знаками $\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 2. Выясните знак тангенса угла:

1) $260°$; 2) 3.

△ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ▲

Упражнения

242. Определите четверть в которой находится точка, полученная поворотом точки (1; 0) на угол α, если:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;
5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

243. Определите знак числа $\sin\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;
5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$.

244. Определите знак числа $\cos\alpha$, если

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;
5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$.

245. Определите знаки чисел $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;
5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$.

246. Определите знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;
4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\le 1{,}8\pi$.

247. Определите знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$.

248. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определите знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;	2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;	3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;	4) $\sin(\pi-\alpha)$;
5) $\cos(\alpha-\pi)$;	6) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$;	7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;	8) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

249. Найдите все значения аргумента α, заключенные в промежутке от 0 до 2π, для которых знаки синуса и косинуса совпадают (различны).

250. Определите знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Сравните значения выражений:

1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

252. Решите уравнение:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1{,}2$?

254. (*Задача Беруни.*) Найдите радиус Земли R, если известны $h=BC$ и угол $\alpha=\angle ABD$ (рис. 67).

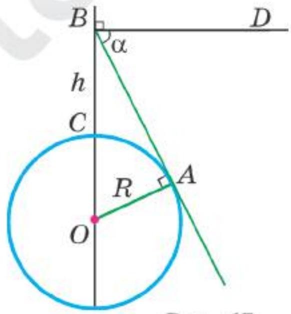


Рис. 67.

§21. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИНУСОМ, КОСИНУСОМ И ТАНГЕНСОМ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

Выясним *зависимость между синусом и косинусом.*

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 68). Тогда по определению синуса и косинуса:

$$x=\cos\alpha,\ \ y=\sin\alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$.

Следовательно,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

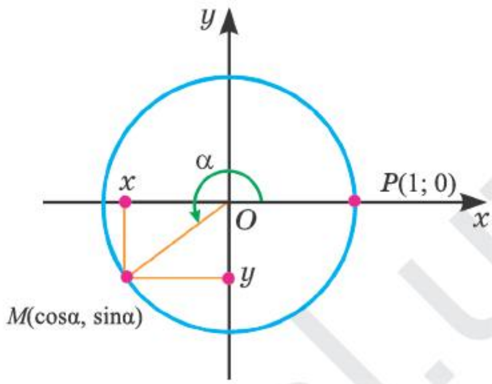


Рис. 68.

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством.*

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и наоборот, $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

△ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$ поэтому в формуле перед корнем нужно поставить знак „–“:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ ▲$$

Задача 2. Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

△ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак „+“:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.*

По определению тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1} \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

Равенства (4)–(6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 3. Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 13$.

△ По формуле (6) находим: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ▲

Задача 4. Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

△ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. ▲

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем *зависимость между тангенсом и косинусом.*

△ Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.}\ \blacktriangle \qquad (7)$$

Формула (7) верна, если $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$,

Из формулы (7) можно можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5. Вычислите $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\triangle$ Из формулы (7) получаем:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. $\blacktriangle$

Задача 6. Вычислите $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=3$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

$\triangle$ Из формулы (7) получаем:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$ и поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}1}$. $\blacktriangle$

Упражнения

255. Вычислите:

1) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha\ \sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

5) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

256. С помощью основного тригонометрического тождества выясните, могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=-1$;

3) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

257. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha=\frac{3}{4}$?

258. Пусть α – один из углов прямоугольного треугольника. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

259. Угол при вершине равнобедренного треугольника имеет тангенс, равный $2\sqrt{2}$. Найдите тангенс этого угла.

260. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\frac{1}{8}$.

261. 1) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

262. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

263. Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Найдите значение выражения:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

264. Решите уравнение:

1) $2\sin x+\sin^2x+\cos^2x=1$; 2) $\sin^2x-2=\sin x-\cos^2x$;

3) $2\cos^2x-1=\cos x-2\sin^2x$; 4) $3-\cos x=3\cos^2x+3\sin^2x$.

§22. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Задача 1. Докажите, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедливо равенство

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

△ По определению $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и поэтому

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Эти преобразования верны, так как $\sin\alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α, то есть таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

В дальнейшем при доказательстве тождеств мы не будем находить допустимые значения углов, если это не тебуется в условии задачи.

Задача 2. Докажите тождество $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

△ $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. ▲

Задача 3. Докажите тождество: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0.$$ ▲

При решении задач 1–3 использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование правой части к левой; преобразование левой части к правой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

За дача 4. Докажите тождество: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

△ $$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ▲

З а д а ч а 5. Упростите выражение: $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}$.

△ $$\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$$ ▲

При решении задач на упрощение тригонометрических выражений мы не будем находить допустимые значения углов, если это не требуется в условии задачи.

Упражнения

265. Докажите тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=tg^2\alpha$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=ctg^2\alpha$;
5) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\frac{1}{1+ctg^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

266. Упростите выражение:

1) $\cos\alpha\cdot tg\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot ctg\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$;
5) $\frac{tg\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, и $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$, и $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, и $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$, и $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

268. Докажите тождество:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

269. Докажите, что при всех допустимых значениях α выражение принимает одно и то же значение, то есть не зависит от α:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$.

270. Докажите тождество:

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$, и $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, и $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

272. Найдите числовое значение $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$.

273. Найдите числовое значение $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$.

274. Решите уравнение:

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$; | 2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

§23. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛОВ α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1;\,0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 69). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox. Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha);\ \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Используя определение тангенса, получаем:

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.} \qquad (2)$$

Аналогично,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

Формулы (1) справедливы при любых α, а формула (2) – при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.

Формулы (1)–(2) позволяют найти значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для отрицательных углов.

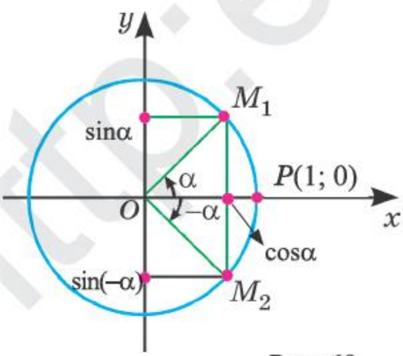


Рис. 69.

Например:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

275. Вычислите:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\frac{1+\mathrm{tg}^2(-30^\circ)}{1+\mathrm{ctg}^2(-30^\circ)}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Упростите выражение:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

277. Докажите тождество: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\mathrm{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Вычислите:

1) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7,5\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Упростите:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

§24. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через косинусы и синусы углов α и β.

Теорема. *Для любых* α *и* β *справедливо равенство:*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

○ Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки M_0 (1; 0) на углы α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ соответственно (рис. 70).

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны, и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Используя формулу для расстояния между двумя точками, известную из курса геометрии, получаем:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) из §23:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

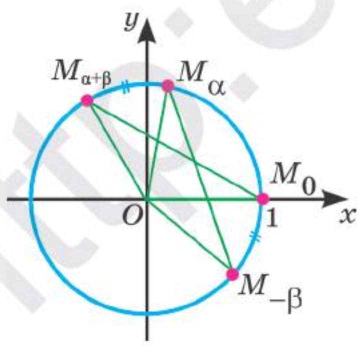


Рис. 70.

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●

Задача 1. Вычислите $\cos75°$.

△ По формуле (1) находим:

$$\cos75°=\cos(45°+30°)=$$
$$=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=$$
$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}.\ ▲$$

Заменив в формуле (1) β на –β, получим:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Задача 2. Вычислите cos15°.

△ По формуле (2) получаем:

$$\cos15° = \cos(45° - 30°) = \cos45°\cos30° + \sin45°\sin30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

Задача 3. Докажите формулы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

△ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta,$$

то есть

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Полагая в формуле $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (4), имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \ ▲$$

Используя формулы (1)–(4), выведем *формулы сложения для синуса*:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на –β, получаем:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

Задача 4. Вычислите sin210°.

$$\triangle\ \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$= \sin 180^\circ\cos 30^\circ + \cos 180^\circ\sin 30^\circ = 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Задача 5. Вычислите:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

$$\triangle\ \sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0. \ \blacktriangle$$

Задача 6. Докажите равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

$$\triangle\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на произведение cosαcosβ, получим формулу (7). ▲

Формула (7) может быть полезна при вычислениях.

Например, по этой формуле находим:

$$\operatorname{tg}225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}180^\circ + \operatorname{tg}45^\circ}{1 - \operatorname{tg}180^\circ\operatorname{tg}45^\circ} = 1.$$

Упражнения

С помощью формул сложения вычислите (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) $\cos 57°30'\cos 27°30' + \sin 57°30'\sin 27°30'$;

2) $\cos 19°30'\cos 25°30' - \sin 19°30'\sin 25°30'$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, где $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, где $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Упростите выражение (**283–284**):

283. 1) $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$; 2) $\cos 5\beta\cos 2\beta + \sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \cos(\alpha-\beta)$.

С помощью формул сложения вычислите (**285–286**):

285. 1) $\sin 73°\cos 17° + \cos 73°\sin 17°$;

2) $\sin 73°\cos 13° - \cos 73°\sin 13°$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, где $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, где $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

287. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

289. Вычислите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

290. Упростите выражение:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

292. Упростите выражение: 1) $\frac{\mathrm{tg}29^\circ+\mathrm{tg}31^\circ}{1-\mathrm{tg}29^\circ\,\mathrm{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi-\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\mathrm{tg}\frac{7}{16}\pi\cdot\mathrm{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

§25. СИНУС И КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

Выведем *формулы синуса и косинуса двойного угла*, используя формулы сложения.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Итак,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Задача 1. Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

△ По формуле (1) находим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot \cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
Итак,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Задача 2. Вычислите $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

△ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \ ▲$$

Задача 3. Упростите выражение: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$△ \ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha. \ ▲$$

Задача 4. Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

△ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

(см. §24) $\beta = \alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$ ▲

Упражнения

Вычислите (**293–294**):

293. 1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
3) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$; 4) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Вычислите $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

296. Вычислите $\cos 2\alpha$, если:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

Упростите выражение (**297–298**):

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

299. Докажите тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Вычислите $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$.

301. Докажите тождество:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

302. Вычислите:

1) $2\cos^2 15° - 1$; | 2) $1 - 2\sin^2 22{,}5°$; | 3) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; | 4) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Упростите выражение:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

305. Вычислите $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$.

306. Вычислите: 1) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{6\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 3) $\frac{4\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$.

§26. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляют для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача 1. Вычислите $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

△ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол $870°$ точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол $150°$, то есть получится та же самая точка M, что и при повороте на угол $150°$ (рис. 71). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$ $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси Oy (рис. 72). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы отличаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°, \ \cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \quad (1)$$

$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°, \ \cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \quad (2).$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол α.

Следовательно, верны формулы:

! $$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha, \ k \in Z. \quad (3)$$

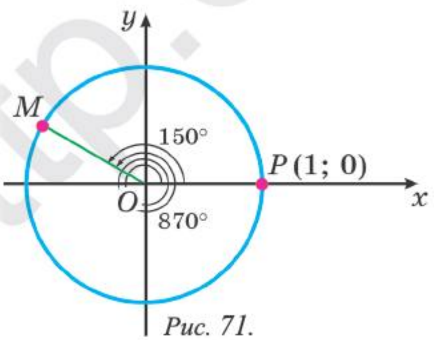


Рис. 71.

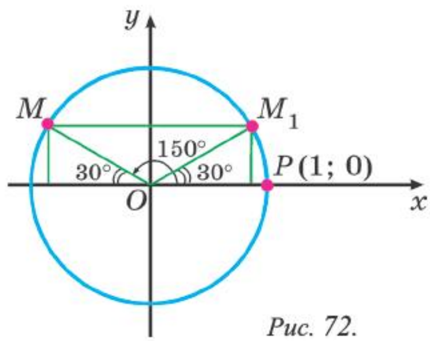


Рис. 72.

В частности, при $k = 1$ справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha.$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.} \quad \mathbf{(4)}$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

Применяя формулу сложения для синуса, получаем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4). Формулы (4) называют *формулами приведения*. С помощью формул (3) и (4) можно свести вычисление синуса и косинуса любого угла к их значениям для острого угла.

Задача 2. Вычислите $\sin 930°$.

Используя формулы (3), получаем:

$$\sin 930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим $\sin(-150°) = -\sin150°$.

По формуле (4) находим:

$$-\sin150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin930° = -\frac{1}{2}$.

Задача 3. Вычислите $\cos\frac{15\pi}{4}$.

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислениям тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Используя это равенство и формулы (4), получаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, справедлива формула:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in Z. \qquad (5)$$

Задача 4. Вычислите: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

△ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

В §24 (задача 3) были доказаны формулы

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

Которые также называют *формулами приведения*. Например, используя эти формулы, получаем $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$.

Для любого значения x справедливы формулы $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются *периодическими с периодом* 2π.

Функция $f(x)$ называется *периодической функцией*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x + T$, $x - T$ и, вообще, числа $x + Tn$, $n \in \mathbf{Z}$ также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Покажем, что число 2π является *наименьшим положительным периодом функции* $y = \cos x$.

Пусть $T > 0$ – период косинуса, то есть для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ... , и поэтому период не может быть меньше 2π.

Можно сказать, что *наименьший положительный период функции* $y = \sin x$ также равен 2π.

Упражнения

Вычислите (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;

5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\, 570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\, 960°$;

5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\, 585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Найдите числовое значение выражения:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \mathrm{ctg}\,1125^\circ$;

2) $\mathrm{tg}\,1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Упростите выражение:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Вычислите:

1) $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$; 2) $\sin 300^\circ + \mathrm{tg}\,150^\circ$;

3) $2\sin 6{,}5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4{,}25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\frac{\sin(-6{,}5\pi) + \mathrm{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi) + \mathrm{ctg}(-16{,}25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^\circ) + \sin 480^\circ}{\mathrm{tg}\,405^\circ - \mathrm{ctg}\,330^\circ}$.

314. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$;

3) $\frac{\sin(\alpha - \pi)}{\mathrm{tg}(\alpha + \pi)} \cdot \frac{\mathrm{tg}(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi - \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot \mathrm{tg}(\pi - \alpha)$.

315. Докажите, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу третьего внутреннего угла.

316. Докажите тождество:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Решите уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$; ;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; 5) $\cos(\pi-2x)=1$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

§27. СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КОСИНУСОВ

Задача 1. Упростите выражение:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Используя формулу сложения и формулу двойного угла, получим:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ▲

Если воспользоваться *формулой суммы синусов*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (1)$$

эту задачу можно решить проще. С помощью этой формулы получаем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

○ Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ и поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-$ $-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

Наряду с формулой (1) используются *формулы разности синусов, формулы суммы и разности косинусов*:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) доказываются аналогично формуле (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$ (докажите самостоятельно).

Задача 2. Вычислите $\sin 75^\circ+\cos 75^\circ$.

△ $\sin 75^\circ+\cos 75^\circ=\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$ ▲

Задача 3. Запишите в виде произведения $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

△ $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

Задача 4. Докажите, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее $\sqrt{2}$.

△ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно –1, а наибольшее равно 1, находим, что наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, а наибольшее значение равно $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. ▲

Упражнения

318. Упростите выражение:

1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$;
2) $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$;
3) $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$;
4) $\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{4})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

319. Вычислите:

1) $\cos105°+\cos75°$;
2) $\sin105°-\sin75°$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin105°+\sin165°$.

320. Запишите в виде произведения:

1) $1 + 2\sin\alpha$;
2) $1 - 2\sin\alpha$;
3) $1 + 2\cos\alpha$;
4) $1 + \sin\alpha$;
5) $1 - \cos\alpha$;
6) $1 + \cos\alpha$;

321. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\mathrm{tg}2\alpha$;
2) $\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos4\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

322. Упростите выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}$;
2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Докажите тождество (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$.

324. 1) $\frac{\sin2\alpha+\sin5\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

325. Запишите в виде произведения:

1) $\cos22^\circ+\cos24^\circ+\cos26^\circ+\cos28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

326. Докажите тождество и вычислите $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$:

1) $\mathrm{tg}\,267^\circ+\mathrm{tg}\,93^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\mathrm{tg}\,99^\circ+\mathrm{tg}\,81^\circ$.

327. Запишите в виде произведения:

1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha+\cos2\alpha$;

3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha$.

Упражнения к главе III

328. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определите четверть, в которой лежит точка, полученная поворотом точки $P(1;0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; 2) $\alpha-\pi$; 3) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$; 4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; 5) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; 6) $\pi-\alpha$.

329. Найдите значения синуса и косинуса угла:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) $\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; 6) $(2k+1)\pi,\ k\in \mathbf{Z}$; 7) $2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Вычислите:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5$;

3) $\sin \pi k + \cos 2k\pi$, где k – целое число;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, где k – целое число.

331. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

332. Докажите тождество:

1) $5\sin^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Упростите выражение:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $(1 - \operatorname{tg}(-\alpha))(1 - \operatorname{tg}(\pi + \alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1 + \operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, где $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, где $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Вычислите:

1) $2\sin75°\cos75°$; 2) $\sin15°$; 3) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
4) $\sin75°$; 5) $\cos75°$; 6) $\sin135°$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. Вычислите: 1) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

2) $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2. Найдите значение выражения:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos150°$; 3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (Задача Гияс-ад-дина Джамшида аль-Каши)
Докажите, что $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

4. Докажите равенство:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2\alpha + \cos2\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Упростите выражение:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Вычислите (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\mathrm{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos3660° + \sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°) + \mathrm{tg}1035°$.

339. Сравните числа:

1) $\sin3$ и $\cos4$; 2) $\cos0$ и $\sin5$; 3) $\sin1$ и $\cos1$.

340. Определите знак числа:

1) $\sin3{,}5\,\mathrm{tg}3{,}5$; 2) $\cos5{,}01\sin0{,}73$; 3) $\frac{\mathrm{tg}13}{\cos15}$;

4) $\sin1\cos2\,\mathrm{tg}3$; 5) $\sin2\cos2$; 6) $\mathrm{tg}1\cos1$.

341. Вычислите:

1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin165°$; 3) $\sin105°$;

4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Упростите выражение:

1) $(1+\mathrm{tg}(-\alpha))(1-\mathrm{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\mathrm{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. Дано: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислите значения $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$.

Упростите выражение (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin4\alpha\cos4\alpha+\sin4\alpha}$;

3) $\frac{\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha-\cos2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;

3) $\frac{\sin^2x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

347. 1) Вычислите $tg(\alpha + \beta)$, если $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ и $tg\beta = 2,4$;

2) вычислите $ctg(\alpha + \beta)$, если $ctg\alpha = \frac{4}{3}$ и $ctg\beta = -1$.

348. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

Тестовые упражнения к главе III

1. Найдите радианную меру 153°.

A) $\frac{17\pi}{20}$; B) $\frac{19\pi}{20}$; C) 17π; D) $\frac{2\pi}{9}$.

2. Найдите градусную меру $0,65\pi$.

A) 11,7°; B) 117°; C) 116°; D) 118°.

3. Какое из произведений отрицательное?

A) $\cos 314°\sin 147°$; B) $tg 200° ctg 201°$;
C) $\cos 163°\cos 295°$; D) $\sin 170° ctg 250°$.

4. Какое из произведений положительное?

A) $\sin 2\cos 2\sin 1\sin 1°$; B) $tg 8° ctg 8 ctg 10° ctg\sqrt{10}$;
C) $\sin 9°\sin 9\cos 9°\cos 9$; D) $\cos 10°\cos 10\cos 11°\cos\sqrt{11}$.

5. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), для того, чтобы попасть в точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$?

A) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; B) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; D) $2\pi + \pi k$, $k \in Z$.

6. Найдите координаты точки, в которую попадет точка (1; 0) после поворота на угол $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

A) (0; 1); B) (0; –1); C) (1; 0); D) (–1; 0).

7. Запишите числа в порядке возрастания:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

A) $a < c < b$; B) $b < c < a$; C) $c < a < b$; D) $b < a < c$.

8. Запишите числа в порядке убывания:

$$a = \cos 2; \ b = \cos 2°; \ c = \sin 2; \ d = \sin 2°.$$

A) $a > c > d > b$; B) $d > c > b > a$;
C) $b > c > d > a$; D) $c > d > b > a$.

9. Вычислите: $\dfrac{\sin 136° \cdot \cos 46° - \sin 46° \cdot \cos 224°}{\sin 110° \cdot \cos 40° - \sin 20° \cdot \cos 50°}$.

A) $\cos 40°$; B) 0,5; C) $\sin 44°$; D) 2.

10. Вычислите: $\dfrac{\sin 10° \cdot \sin 130° - \sin 100° \cdot \sin 220°}{\sin 27° \cdot \cos 23° - \sin 157° \cdot \cos 153°}$.

A) 1; B) –1; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Вычислите: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

A) 1; B) –1; C) $\sqrt{2}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Найдите $\mathrm{tg}\,2\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

A) 3,42; B) $3\frac{3}{7}$; C) $\frac{7}{24}$; D) $-\frac{7}{24}$.

13. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{5}$.

A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; D) $\sqrt{5}$.

14. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{7}$.

A) $\frac{4}{3}$; B) $-\frac{4}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $-\frac{3}{4}$.

15. Упростите: $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

A) –1; B) 1; C) 0,5; D) $-\dfrac{1}{2}$.

16. Упростите: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

A) $3\sin\alpha$; B) $\dfrac{1}{3}\sin\alpha$; C) $-\sin\alpha$; D) $\dfrac{1}{3}\cos\alpha$.

17. Вычислите $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}$.

A) 0,59; B) 0,49; C) –0,49; D) 0,2.

18. Найдите $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

A) $\dfrac{81}{49}$; B) $-\left(\dfrac{7}{9}\right)^2$; C) $\dfrac{49}{81}$; D) $-1\dfrac{32}{49}$.

19. Вычислите: $\sin 100^\circ\cdot\cos 440^\circ+\sin 800^\circ\cdot\cos 460^\circ$.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) –1; D) 0.

20. Упростите: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

A) $4\cos 2\alpha$; B) $-2\sin 4\alpha$; C) $\sin 4\alpha$; D) $2\cos 2\alpha$.

21. Найдите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ – корни квадратного уравнения $8x^2-6x+1=0$, α, β – углы в первой четверти.

A) $\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; B) $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; C) $\dfrac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; D) $\dfrac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – корни квадратного уравнения $6x^2-5x+1=0$, α, β – углы в первой четверти.

A) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$; B) $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$; C) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{7}$; D) $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. Найдите x: $2(x+\sqrt{2})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $2\sqrt{2}$.

24. Найдите $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ – корни квадратного уравнения $x^2-7x+12=0$.

A) 1; B) $\frac{7}{11}$; C) $\sqrt{3}$; D) $-\frac{7}{11}$.

Практические и межпредметные задачи

Задача. (Задача Беруни.) Находясь на вершине горы, на высоте 4,83 км над уровнем моря, наблюдатель определил что угол наклона океана к горизонту равен 2,23°. Найдите радиус Земли.

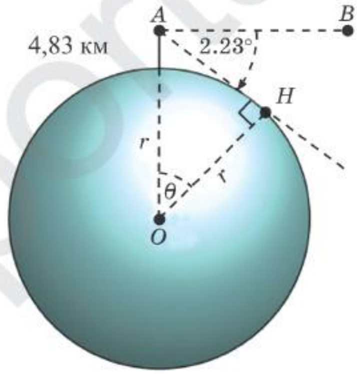


Рис. 73.

Абу Райхон Мухаммад ибн Ахмад Беруни – великий средневековый ученый-энциклопедист (973–1048 гг) использовал следующий метод нахождения радиуса земного шара с высокой точностью.

△ Примем Землю за шар. Обозначим радиус Земли r, вершину горы A, а точку горизонта, лежащую на прямой, выходящей из точки A, обозначим H, как показано на рисунке 73. Пусть точка O – центр Земли, а точка B – точка горизонтальной прямой, выходящей из точки A и перпендикулярной $\overline{OA}$. Угол $\angle AOH$ обозначим буквой θ.

Точка A находится на уровне 4,83 км над уровнем моря, поэтому $OA=r+4{,}83$. Кроме того, $OH=r$. Прямые $\overline{AB}$ и $\overline{OA}$ перпендикулярны, поэтому $\angle OAB=90°$, и, следовательно, $\angle OAH=90°-2{,}23°=87{,}77°$. Если рассматривать поверхность Земли как окружность, $\overline{AH}$ будет касательной к этой окружности и, следовательно, $\overline{AH}$ и $\overline{OH}$ будут перпендикулярны, т.е. $\angle OHA=90°$. Сумма углов треугольника OAH равна180°, следовательно,

$\theta = 180° - 90° - 87{,}77° = 2{,}23°$. Таким образом, $\cos\theta = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{r}{r+4{,}83}$, откуда

$\dfrac{r}{r+4{,}83} = \cos 2{,}23°$.

Найдем r из этого уравнения:

$$r = (r+4{,}83)\cos 2{,}23° \Rightarrow r - r\cos 2{,}23° = 4{,}83\cos 2{,}23° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4{,}83\cos 2{,}23°}{1-\cos 2{,}23°} \Rightarrow r = 6372{,}91.$$

Следует отметить, что полученный результат очень близок среднему радиусу Земли, принятому в настоящее время – 6371 км.

Ответ: $r = 6372{,}91$ км. ▲

Задачи

1. Спутник, находящийся на высоте h (км) над поверхностью Земли, движется по окружности. Пусть d – длина видимого спутником Земли горизонта (рис. 74).

1) Найдите уравнение, связывающее центральный угол θ (в радианах) и высоту h;

2) найдите уравнение, связывающее длину d видимого горизонта и угол θ;

3) найдите уравнение, связывающее d и h;

4) на какой высоте должен находиться спутник Земли, если $d = 4000$ км?

5) каким будет d, если $h = 100$ км?

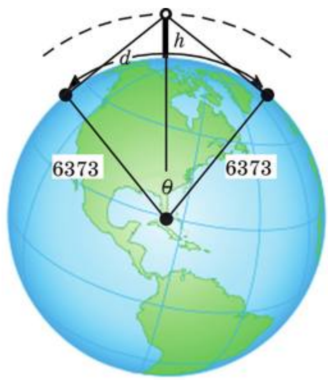


Рис. 74.

2. Баскетболист, рост которого 2 м, находится на расстоянии 5 м от основания щита с корзиной. Корзина расположена на высоте 3 м (рис. 75). Чему равен угол, под которым баскетболисту виден обод корзины?

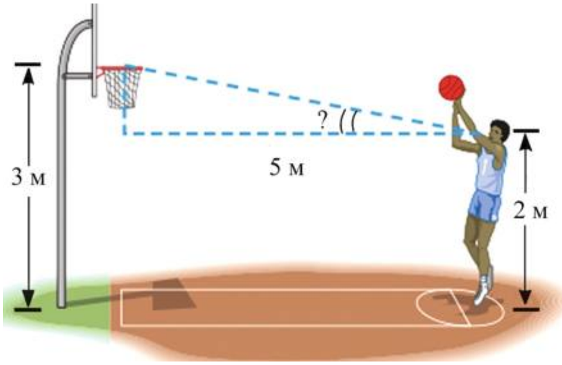


Рис. 75.

3. Чтобы найти высоту горы, маркшейдер (специалист по разведке месторождений и правильному их использованию) измеряет углы, под которыми видна ее вершина, из двух точек, расположенных на расстоянии 900 м друг от друга (рис. 76). Один из углов равен 47°, а другой – 35°. Найдите высоту горы, если высота теодолита (прибора для измерения углов) равна 2 м.

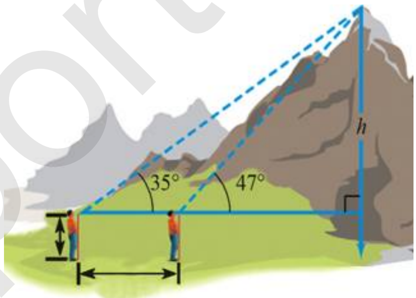


Рис. 76.

4. В волейболе мяч летит на расстояние d по горизонтали, которое вычисляют по формуле $d = \frac{v}{9,75}\sin 2(\theta)$, где θ – угол под которым летит мяч и v м/с – начальная скорость. Найдите d, если $\theta = 60°$ и скорость мяча 12 м/с (рис. 77).

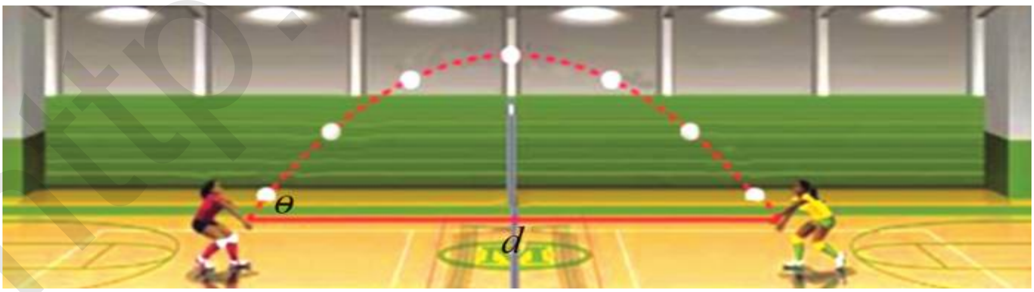


Рис. 77.

Исторические задачи

Задачи Абу Райхана Беруни

1. Из некоторой точки A верхнего края колодца, имеющего форму цилиндра, его дно видно под углом α, а из точки B, расположенной на продолжении стенки колодца (рис. 78) – под углом β. Найдите глубину колодца, если $AB = a$:

Дано:

$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Найти: $AC = ?$

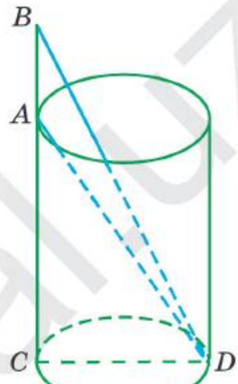


Рис. 78.

2. Из точки A минарет виден под углом α, а из точки B под углом β (рис. 79). Найдите высоту минарета, если $AB = a$.

Дано:

$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.

Найти: $CD = ?$

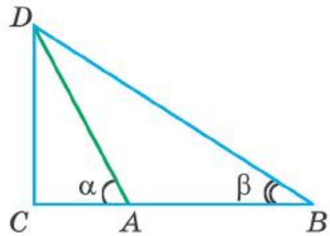


Рис. 79.

Задача Гияс эд-Дина ал-Каши

3. Докажите, что для любого угла α верно равенство

$$\sin\left(45^\circ \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}.$$

Задача известного математика Абулвафа ал-Бузджани (940–998)

4. Докажите, что для любых α и β верно равенство

$$\sin(\alpha-\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Исторические сведения

Мирзо Улугбек (1394–1449)

Выдающиеся средневековые ученые Мухаммад ал-Хорезми, Ахмад ал-Фергани, Абу Райхан Беруни, Улугбек, Ал-Каши, Али Кушчи внесли большой вклад в развитие математики и, в частности, тригонометрии. Определение координат светил на небесной сфере, наблюдение за движением планет, предсказание солнечных и лунных затмений требовало составление астрономических (в частности, тригонометрических) таблиц, которые на арабском Востоке назывались „Зиджами".

Составленные ими руководства, переведенные на латынь и другие европейские языки, оказали большое влияние на развитие математики и астрономии в средневековой Европе.

В „Каноне Масуда" Абу Райхана Беруни имеются составленные с точностью до 10^{-8} таблицы синусов с интервалом в 1°. Наиболее точным для своего времени считался „Зидж" Мирзо Улугбека – „Гураганский зидж". В нем имелись составленные с точностью до 10^{-10} таблицы синусов с интервалом в 1 минуту, таблицы тангенсов от 0° до 45° с интервалом в 1 минуту и от 46° до 90° с интервалом в 5 минут.

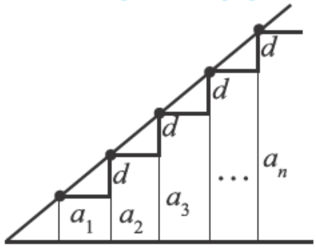
В трактате „Трактате о хорде и синусе" ал-Каши вычислил $\sin 1^\circ$ с 17 верными знаками после запятой:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Ал-Каши в своем „Трактате об окружности" получил приближенное значение для 2π, полагая, что длина окружности радиуса 1 есть среднее арифметическое периметров правильных вписанного и описанного $3\cdot 2^n$-угольников, где $n = 28$:

$$2\pi = 6{,}2831853071795865...$$

Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ



§28. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В повседневной практике часто используется нумерация различных предметов, чтобы указать порядок их расположения. Например, дома на каждой улице нумеруются. В библиотеке нумеруются читательские абонементы и затем располагаются в порядке присвоенных номеров в специальных картотеках.

В сберегательном банке по номеру лицевого счета вкладчика можно легко найти этот счет и посмотреть, какой вклад на нем лежит. Пусть на счете №1 лежит вклад a_1 сумов, на счете №2 лежит вклад a_2 сумов и так далее. Получается *числовая последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N,$$

N– число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n.

В математике изучаются *бесконечные* числовые последовательности:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Число a_1 называют первым членом последовательности, число a_2 – вторым членом последовательности, число a_3 – третьим членом последовательности и так далее. Число a_n называют n-ым (энным) членом последовательности, а натуральное число n его номером. Например, в последовательности квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... $a_1=1$ – первый член последовательности; $a_n=n^2$ – n-ый член последовательности; $a_{n+1}=(n+1)^2$ – $(n+1)$-ый член последовательности.

Часто последовательность можно задать формулой его n-го члена. Например, формулой $a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, ...)$ задана последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$.

Задача 1. Числовая последовательность задана формулой $a_n=n(n-2)$. Вычислите сотый член этой последовательности.

$$\triangle\ a_{100}=100\cdot(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Числовая последовательность задана формулой $a_n=2n+3$. 1) Найдите номер члена последовательности, равного 43; 2) Выясните, может ли число 50 быть членом этой последовательности.

$\triangle$**1)** По условию $2n+3=43$, откуда $n=20$.

2) Если число 50 является n-ым членом последовательности, то $2n+3=50$, откуда $n=23{,}5$. Так как искомый номер – натуральное число, то в данной последовательности нет члена, равного 50. $\blacktriangle$

Иногда последовательность задают формулой, позволяющей вычислить следующий член через предыдущие. В этом случае дополнительно задают один или несколько первых членов последовательности. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* (от латинского *recurro* – возвращаться).

Задача 3. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$ и условиями $b_1=1$, $b_2=3$. Вычислите пятый член этой последовательности.

$\triangle$ $b_3=b_2+b_1=3+1=4.$

$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$

$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$ **Ответ:** $b_5=11.$ $\blacktriangle$

Упражнения

349. Дана последовательность квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ...

1) Назовите третий, шестой, n-ый член последовательности.

2) Укажите номер члена последовательности, равного 4, 25, n^2, $(n+1)^2$.

350. Вычислите первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена:

1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;

4) $a_n = \dfrac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \dfrac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Устно). Числовая последовательность задана формулой $x_n = n^2$. Какой номер имеет член последовательности, равный 100; 144; 225? Является ли членом последовательности число: 48, 49, 169?

352. Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 6$. Является ли членом последовательности число:

1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9?

353. Найдите первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой: 1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$ и условием $a_1 = 2$.

354. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Найдите n, если: 1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$.

355. Вычислите первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой: $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ и условием $a_1 = 256$.

356. Запишите первые шесть членов последовательности, заданной условием $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2}{3}}$.

357. Вычислите пятый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ и условием $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

358. Числовая последовательность задана формулой n-го члена. Запишите $(n + 1)$-, $(n + 2)$- и $(n + 5)$-ый члены последовательности:

1) $a_n = -5n + 4$; | 2) $a_n = 2(n - 10)$; | 3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; | 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

§29. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Готовясь к экзамену, ученик запланировал каждый день решать по 5 тестовых задач. Как изменяется каждый день число решенных им задач?

Число запланированных задач изменяется каждый день следующим образом:

1-й день	2-й день	3-й день	4-й день...
5	10	15	20 ...

Получаем в результате следующую последовательность:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots .$$

Обозначим через a_n число задач, которые надо решить к n-му дню. Например,

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ \ldots .$$

Полученные числа образуют *числовую последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

В этой последовательности каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 5. Такую последовательность называют *арифметической прогрессией*.

Определение. ***Числовая последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ... называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных чисел n выполняется равенство***

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(здесь d – некоторое число).

Из этой формулы следует, что $a_{n+1} - a_n = d$. Число d называют *разностью арифметической прогрессии.* Например,

1) Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4 ..., n, ... является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 1$.

2) Последовательность целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, ..., -n$, ... – арифметическая прогрессия с разностью $d = -1$.

3) Последовательность 3, 3, 3, ..., 3, ... – арифметическая прогрессия с разностью $d = 0$.

Задача 1. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = 1{,}5 + 3n$, является арифметической прогрессией.

△ Требуется доказать, что разность $a_{n+1} - a_n$ одна и та же для всех n (не зависит от n).

Запишем $(n + 1)$-й член последовательности:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Поэтому

$$a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$$

Следовательно, разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n. ▲

По определению арифметической прогрессии, $a_{n+1} = a_n + d$, $a_{n-1} = a_n - d$, откуда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \; n > 1.$$

Таким образом, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название „арифметическая“ прогрессия.

Отметим, что если a_1 и d заданы, то остальные члены арифметической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $a_{n+1} = a_n + d$. Таким способом нетрудно вычислить несколько первых членов прогрессии, однако, например, для a_{100} уже потребуется много вычислений. Обычно, для этого используется формула n-го члена.

По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ и так далее.}$$

Вообще,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d,} \qquad \textbf{(1)}$$

так как n-ый член арифметической прогрессии получается из первого члена прибавлением $(n - 1)$ раз числа d.

Формулу (1) называют *формулой n-го члена арифметической прогрессии*.

Задача 2. Найдите сотый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -6$ и $d = 4$.

△ По формуле (1) имеем: $a_{100} = -6 + (100 - 1)\cdot 4 = 390$. ▲

Задача 3. Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ... Найдите номер этого члена.

△ Пусть n – искомый номер. Так как $a_1 = 3$ и $d = 2$, то по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)d$ имеем: $99 = 3 + (n - 1)\cdot 2$. Поэтому $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$.

Ответ: $n = 49$. ▲

Задача 4. В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найдите формулу n-го члена.

△ Используя формулу (1), находим:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

Подставив данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$4d = 36,\ d = 9.$$

Следовательно, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Запишем формулу n-го члена:

$$a_n = 67 + 9(n-1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ответ: $a_n = 9n + 58$. ▲

Задача 5. На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые (рис. 80). Докажите, что длины a_1, a_2, a_3, ... отрезков этих прямых, заключенных между сторонами угла, образуют арифметическую прогрессию.

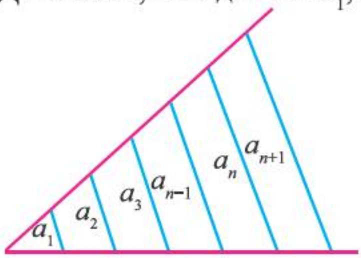


Рис. 80.

△ В трапеции с основаниями a_{n-1} и a_{n+1} средняя линия равна a_n. Поэтому

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Отсюда $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ или $a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n-1}$.

Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность – арифметическая прогрессия. ▲

Упражнения

359. (Устно.) Назовите первый член и разность арифметической прогрессии:

1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 2$ и $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ и $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ и $d = -1$.

361. Докажите, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является арифметической прогрессией:

1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. В арифметической прогрессии найти:

1) a_{15}, если $a_1 = 2$, $d = 3$;

2) a_{20}, если $a_1 = 3,\ d = 4$;
3) a_{18}, если $a_1 = -3,\ d = -2$;
4) a_{11}, если $a_1 = -2,\ d = -4$.

363. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии:

1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. Число –22 является членом арифметической прогрессии 44, 38, 32, ... Найдите номер этого члена.

365. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии –18, –15, –12, ... ?

366. Число –59 является членом арифметической прогрессии 1, –5 ... , Найдите его номер. Является ли число –46 членом этой прогрессии?

367. Найдите разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 7,\ a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4,\ a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8,\ a_{10} = 64$.

368. Разность арифметической прогрессии равна 1,5. Найдите a_1, если:

1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$.

369. Найдите первый член арифметической прогрессии, если:

1) $d = -3,\ a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10,\ a_{22} = -5{,}5$; 3) $a_3 = -1,\ a_9 = 17$

370. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_3 = 13,\ a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7,\ a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11,\ a_{13} = 29$.

---

371. При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

372. В арифметической прогрессии $a_1 = -10,\ d = 0{,}5$. При каких n выполняется неравенство $a_n < 2$?

373. Найдите девятый член и разность арифметической прогрессии:

1) $a_8 = 126,\ a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64,\ a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7,\ a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5,\ a_{10} = -2{,}5$.

§30. СУММА *n* ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕСИИ

Задача 1. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

△ Запишем эту сумму двумя способами:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101}_{100 \text{ слагаемых}}$$

Поэтому $2S = 101 \cdot 100$, откуда $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Пусть S_n – сумма *n* первых членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

! *Теорема.* Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (1)$$

○ Запишем S_n двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

По определению арифметической прогрессии эти равенства можно записать так:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1)d), \quad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-1)d). \quad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ слагаемых}}$$

Следовательно, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$. ●

Задача 2. Найдите сумму первых n натуральных чисел.

△ Последовательность

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots,\ n,\ \dots$$

является арифметической прогрессией с разностью $d = 1$. Так как $a_1 = 1$ и $a_n = n$, то по формуле (1) находим:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \ ▲$$

Задача 3. Найдите сумму $38 + 35 + 32 + \dots + (-7)$, если известно, что ее слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

△ По условию $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. Применяя формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$, получаем $-7 = 38 + (n-1)(-3)$, откуда $n = 16$.

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ находим:

$$S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248. \ ▲$$

Задача 4. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

△ Натуральный ряд чисел – арифметическая прогрессия с разностью $d = 1$. По условию $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Используя данные, получаем уравнение с неизвестным n:

$$153 = \frac{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1}{2}\cdot n,$$

откуда

$$306 = 2n + (n-1)n,\ \ n^2 + n - 306 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1\pm 35}{2},$$

$$n_1 = -18,\ n_2 = 17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n = 17$. ▲

Упражнения

374. Найдите сумму *n* первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 1,\ a_n = 20,\ n = 50$;
2) $a_1 = 1,\ a_n = 200,\ n = 100$;
3) $a_1 = -1,\ a_n = -40,\ n = 20$;
4) $a_1 = 2,\ a_n = 100,\ n = 50$.

375. Найдите сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

376. Найдите сумму всех нечетных чисел от 1 до 133 включительно.

377. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -5,\ d = 0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = -3$; 3) $a_1 = 36,\ d = -2{,}5$.

378. Найдите сумму *n* первых членов арифметической прогрессии:

1) 9; 13; 17; ... , если $n = 11$;
2) –16; –10; –4; ... , если $n = 12$.

379. Найдите сумму, если ее слагаемые – последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $3 + 6 + 9 + ... + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + ... + (-60)$

380. Найдите сумму всех двузначных чисел; сумму всех трехзначных чисел.

381. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найдите S_{50}, если:

1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$.

382. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

383. Найдите a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$.

384. Найдите a_1 и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; | 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$; | 3) $a_{20} = 65$, $S_{20} = 350$.

385. При хранении бревен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке 81. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

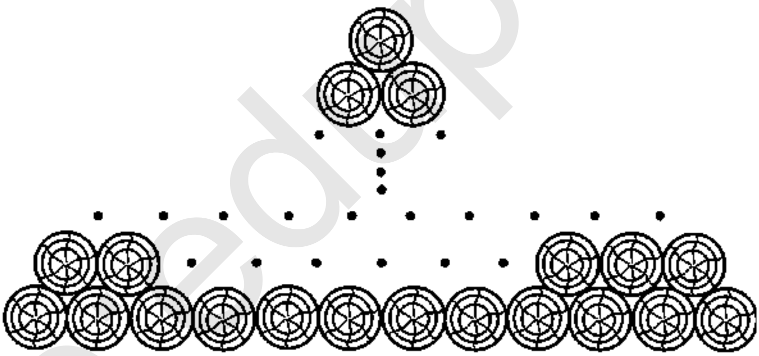


Рис. 81.

386. В арифметической прогрессии $a_3 + a_9 = 8$. Найдите S_{11}.

387. Назовите первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

388. Докажите, что для арифметической прогрессии выполняется равенство $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$.

§31. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см. Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 82). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см и так далее. Запишем последовательность длин сторон этих треугольников:

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots .$$

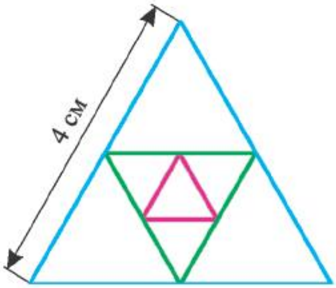


Рис. 82.

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$. Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*.

Определение. **Числовая последовательность**

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_n \neq 0$, q – некоторое число, не равное нулю.

Из этой формулы следует, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Примеры.

1) 2, 8, 32, 128, ... – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 4$;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{2}{3}$;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -12$;

4) 7, 7, 7, 7, ... – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1$.

Задача 1. Докажите, что последовательность, заданная формулой $b_n = 7^{2n}$, является геометрической прогрессией.

△ Отметим, что n $b_n = 7^{2n} \neq 0$ при всех n. Требуется доказать, что частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ одно и то же число для всех n (не зависит от n). Действительно,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

то есть частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ не зависит от n. ▲

По определению геометрической прогрессии

$$b_n + 1 = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

откуда

$$b^2_{n+1} = b_{n-1}\, b_{n+1}, \; n > 1.$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, то есть каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название „геометричекая“ прогрессия.

Отметим, что если b_1 и q заданы, то остальные члены геометрической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $b_{n+1} = b_n q$. Однако для больших n это трудоемко. Обычно пользуются формулой n-го члена.

По определению геометрической прогрессии

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ и так далее.}$$

Вообще,

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

так как n-ый член геометрической прогрессии получается из первого члена умножением $(n–1)$ раз на q.

Формулу (1) называют *формулой n-го члена геометрической прогрессии.*

Задача 2. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$.

△ По формуле (1) имеем:

$$b_7 = 81 \cdot (\tfrac{1}{3})^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \ ▲$$

Задача 3. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найдите номер этого члена.

△ Пусть n – искомый номер. Так как $b_1 = 2$, $q = 3$, то по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \ 243 = 3^{n-1}, \ 3^5 = 3^{n-1},$$

откуда $n-1=5$, $n=6$. ▲

Задача 4. В геометрической прогрессии $b_6=96$ и $b_8=384$. Найдите формулу n-го члена.

△ По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем: $b_6=b_1q^5$, $b_8=b_1q^7$. Подставив данные b_6 и b_8, получим: $96=b_1q^5$, $384=b_1q^7$. Разделив второе из этих равенств на первое, получим:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

откуда $4=q^2$ или $q^2=4$. Из последнего равенства находим $q=2$ или $q = –2$.

Чтобы найти первый член прогрессии, воспользуемся равенством $96 = b_1q^5$.

1) Пусть $q = 2$. Тогда $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96= b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$.

Следовательно, если, $b_1 = 3$ и $q = 2$ формула n-го члена имеет вид

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

2) Пусть $q = -2$. Тогда $96 = b_1(-2)^5$, $96 = b_1(-32)$, $b_1 = -3$.

Следовательно, если $b_1 = -3$ и $q = -2$, то формула n-го члена имеет вид

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}.$$

Ответ: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ или $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

Задача 5. В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него – третья окружность и так далее (рис. 83). Докажите, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

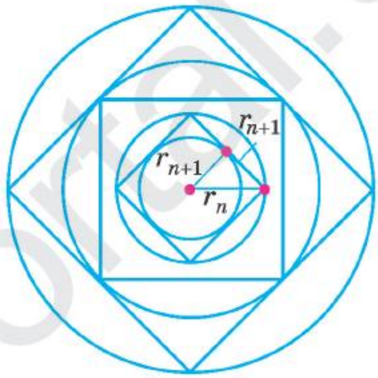


Рис. 83.

△ Пусть r_n – радиус n-ой окружности. Тогда по теореме Пифагора

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

откуда

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ или } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n.$$

Значит, последовательность радиусов окружностей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ▲

Упражнения

389. (Устно.) Назовите первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ;
3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Запишите первые пять членов геометрической прогрессии:

1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$.

391. Докажите, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является геометрической прогрессией:

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Для геометрической прогрессии вычислите:

1) b_4, если $b_1 = 3$ и $q = 10$; 2) b_7, если $b_1 = 4$ и $q = \frac{1}{2}$;

3) b_5, если $b_1 = 1$ и $q = -2$; 4) b_6, если $b_1 = -3$ и $q = -\frac{1}{3}$.

393. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) 4, 12, 36, ...;
2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...;
3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;
4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ;
5) 16, 8, 4, 2, ... ;
6) –9, 3, –1, $\frac{1}{3}$, ...

394. Найдите номер подчеркнутого члена геометрической прогрессии:

1) 6, 12, 24, ... , <u>192</u>, ...; 2) 4, 12, 36, ... , <u>324</u>, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , <u>128</u>, ...

395. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$.

---

396. Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ...

1) Вычислите восьмой член этой прогрессии;

2) найдите номер члена последовательности, равного 162.

397. Найдите седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$.

398. Найдите пятый и первый члены геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3) $b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$.

399. Вкладчик 4 января 2009 года внес в сберегательный банк 300 000 сумов. Какой станет сумма его вклада на 4 января 2012 года, если сберегательный банк начисляет ежегодно 30% от суммы вклада?

400. Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и так далее. Докажите, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найдите площадь седьмого квадрата.

§32. СУММА *n* ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача 1. Найдите сумму:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \qquad (1)$$

△ Умножим обе части равенства на 3:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (2)$$

Перепишем равенства (1) и (2) так:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Выражения, стоящие в скобках, одинаковы. Поэтому, вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6-1}{2} = \frac{729-1}{2} = 364. \ ▲$$

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию b_1, b_1q, ..., b_1q^n, ... , знаменатель которой $q \neq 1$. Пусть S_n – сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}. \qquad (3)$$

Теорема. ***Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем q ≠ 1 равна:***

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad \mathbf{(4)}$$

○ Умножим обе части равенства (3) на q:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n. \qquad (5)$$

Перепишем равенства (3) и (5), выделив в них одинаковые слагаемые:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Выражения, стоящие в скобках, равны. Поэтому, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Отсюда

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Заметим, что если $q = 1$, то

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ слагаемых}} = b_1 n \text{, то есть } S_n = b_1 n.$$

Задача 2. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $6,\ 2,\ \frac{2}{3}, \ldots$.

△ В этой прогрессии $b_1 = 6,\ q = \frac{1}{3}$. По формуле (4) находим:

$$S_5 = \frac{6\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = \frac{242}{27}.$$ ▲

Задача 3. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых шести членов равна 252. Найдите первый член этой прогрессии.

△ Воспользуемся формулой (4):

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right)$, $252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}$, $b_1 = 128$. ▲

Задача 4. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна –93. Первый член этой прогрессии равен –3, а знаменатель равен 2. Найдите n.

△ Используя формулу (4), получаем:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Отсюда $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

Задача 5. Последовательность 5, 15, 45, ..., 1215, ... – геометрическая прогрессия. Найдите сумму 5 + 15 + 45 + ... + 1215.

△ В этой прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Используя условие задачи, находим:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645-5}{2} = 1820. ▲$$

Упражнения

401. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$;
2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;
3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$;
4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$.

402. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

1) 5, 10, 20, ... ; 2) 2, 6, 18, ... ; 3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. В геометрической прогрессии найдите:

1) b_1 и b_7, если $q = 2$, $S_7 = 635$;
2) b_1 и b_8, если $q = -2$, $S_8 = 85$.

404. В геометрической прогрессии найдите число n членов, если:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2$;
2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2$;
3) $S_n = 170, b_1 = 256, \ q = -\frac{1}{2}$;
4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$.

405. В геометрической прогрессии найдите:

1) n и b_n, если $b_1 = 7, \ q = 3, \ S_n = 847$;
2) n и b_n, если $b_1 = 8, \ q = 2, \ S_n = 4088$;
3) n и q, если $b_1 = 2, \ b_n = 1458, \ S_n = 2186$;
4) n и q, если $b_1 = 1, \ b_n = 2401, \ S_n = 2801$.

406. Найдите сумму чисел, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128$; 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243$;
3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128$; 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405$.

407. В геометрической прогрессии найдите b_5 и S_4, если:

1) $b_2=15, \ b_3=25$; | 2) $b_2=14, \ b_4=686$, | 3) $b_2=15, \ b_4=375, q > 0$.

408. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена:

1) найдите S_5, если $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$;
2) найдите S_6, если $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

409. Докажите тождество:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1$,
где n – натуральное число, большее 1.

410. В геометрической прогрессии найдите:

1) b_1 и q, если $b_3 = 135, S_3 = 195$;
2) q и b_3, если $b_1 = 12, S_3 = 372$.

411. В геометрической прогрессии найдите:

1) q, если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$;
2) q, если $b_2 = 3$ и $b_4 + b_6 = 60$;
3) S_{10}, если $b_1 - b_3 = 15$ и $b_2 - b_4 = 30$;
4) S_5, если $b_3 - b_1 = 24$ и $b_5 - b_1 = 624$.

§33. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 84. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго квадрата равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего – $\frac{1}{2^2}$ и так далее. Таким образом, стороны квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots. \qquad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \ldots,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ \ldots. \qquad (2)$$

Из рисунка 84 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому прогрессии (1) и (2) называются бесконечно убывающими. Отметим, что у рассматриваемых прогрессий знаменатели меньше единицы.

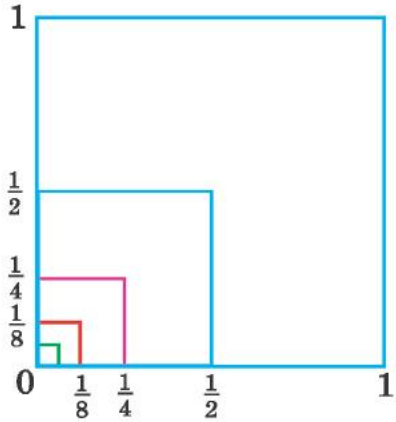


Рис. 84.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию:

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ \ldots. \qquad (3)$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$,

а ее члены $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$

и так далее.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Прогрессию (3) также называют *бесконечно убывающей*. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

Задача 1. Докажите, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

△ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ▲

На рисунке 85 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и так далее. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots .$$

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, то есть:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1 .$$

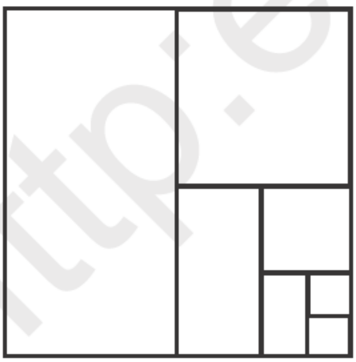


Рис. 85.

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} .$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} .$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут: $\frac{1}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$ (читается: $\frac{1}{2^n}$ стремится к нулю при n, стремящимся к бесконечности) или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (читается: предел последовательности $\frac{1}{2^n}$ при n, стремящимся к бесконечности равен нулю).

Вообще, если для последовательности a_n существует число a такое, что при $n\to\infty$ разность $a_n - a \to 0$, то говорят, что число a является пределом последовательности a_n (предел последовательности a_n при $n\to\infty$ равен a) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Так как $\frac{1}{2^n} \to 0$ при $n\to\infty$, то $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 1$ при $n\to\infty$, то есть $S_n \to 1$ при $n\to\infty$. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ считают равной 1.

Рассмотрим теперь любую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^{n-1}, \ldots$, где $|q| < 1$.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому стремится сумма ее первых членов при $n \to \infty$.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Перепишем ее так:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n.} \qquad (4)$$

Так как $|q| < 1$, то $q^n \to 0$, если n возрастает. Поэтому $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ стремится к нулю при $n\to\infty$. В формуле (4) первое слагаемое не зависит от n. Следовательно, S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n\to\infty$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

В частности, при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнем, что это равенство и равенство (5) справедливы только при $|q| < 1$.

Задача 2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$.

△ Так как $b_1 = \frac{1}{2},\ b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, $S = \frac{b_1}{1-q}$ и по этой формуле:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}. \ ▲$$

Задача 3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1,\ q = \frac{1}{7}$.

△ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ при $n = 3$, получаем $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$, откуда $b_1 = -49$.

По формуле (5) находим сумму S:

$$S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}. \ ▲$$

Задача 4. Пользуясь формулой (5), запишите бесконечную периодическую дробь $a = 0,(15) = 0,151515\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

△ Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots .$$

По формуле (5) получим:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \ ▲$$

Упражнения

412. Докажите, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots;$
2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots;$
3) $-81, -27, -9, \dots;$
4) $-16, -8, -4, \dots;$
5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots;$
6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots .$

413. Выясните, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40,\ b_2 = -20;$
2) $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4};$
3) $b_7 = -30,\ b_6 = 15;$
4) $b_5 = -9,\ b_9 = -\frac{1}{27}.$

414. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots;$
2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots;$
3) $-25, -5, -1, \dots;$
4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots;$
5) $128, 64, 2, \dots;$
6) $-81, -27, -9, \dots .$

415. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{8};$
2) $q = -\frac{1}{3},\ b_1 = 9;$
3) $q = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{81};$
4) $q = -\frac{1}{2},\ b_4 = -\frac{1}{8}.$

416. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой *n*-го члена?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. Найдите сумму бесконечно убывающей геометричской прогрессии:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) 100, –10, 1 ... ; 3) 98, 28, 8, ...

418. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$.

419. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найдите:

1) b_1, если $q = \frac{1}{3}$; 2) q, если $b_1 = 75$; 3) q, если $b_1 = 15$.

420. На куб с ребром a поставили куб с ребром $\frac{a}{2}$, на него поставили куб с ребром $\frac{a}{4}$, затем куб с ребром $\frac{a}{8}$ и так далее (рис.86). Найдите высоту получившейся фигуры.

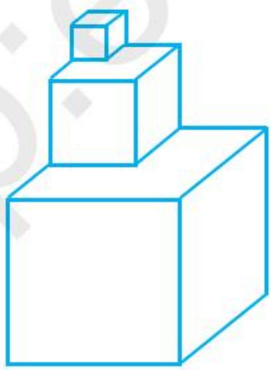


Рис. 86.

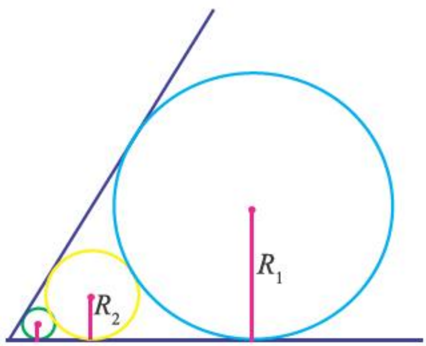


Рис. 87.

421. В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 87). Радиус первой окружности равен R_1. Радиусы остальных окружностей R_2, R_3, ..., R_n, ... Покажите, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Докажите, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

422. Запишите бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

Упражнения к главе IV

423. Найдите разность арифметической прогрессии и запишите ее четвертый и пятый члены:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ ...$; 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ ...$;

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ ...$; 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ ...$.

424. Докажите, что последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n=-2(1-n)$, является арифметической прогрессией.

425. В арифметической прогрессии вычислите:

1) a_5, если $a_1 = 6$, $d=\frac{1}{2}$; 2) a_7, если $a_1=-3\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{3}$;

3) a_{11}, если $a_1=4{,}8$, $d=1{,}2$.

426. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$; 3) $a_3 = -2$, $a_5 = 6$.

427. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=-2$, $a_n=-60$, $n=10$; 2) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=25\frac{1}{2}$, $n=11$.

428. Найдите сумму, если ее слагаемые – последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $-38 + (-33) + (-28) + ... + 12$;
2) $-17 + (-14) + (-11) + ... + 13$.

429. Найдите знаменатель геометрической прогрессии и запишите ее четвертый и пятый члены:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots;$ 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots;$

4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots;$ 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \ldots;$ 3) –27, –9, –3... .

431. В геометрической прогрессии найдите b_n, если:

1) $b_1 = 2,\ q = 2,\ n = 6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{8},\ q = 5,\ n = 4;$

3) $b_1 = -8,\ q = \frac{1}{2},\ n = 5.$

432. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -4,\ n = 5;$ 2) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 10;$

3) $b_1 = 10,\ q = 1,\ n = 6;$ 4) $b_1 = 5,\ q = -1,\ n = 9.$

433. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6$; 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5$;

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ n = 5;$ 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n = 4.$

434. Докажите, что данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей и найдите ее сумму:

1) $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots;$ 2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $7,\ 1,\ \frac{1}{7},\ \ldots.$

---

435. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 2\frac{1}{2}$ и $a_8 = 23\frac{1}{2}$.

436. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 5,\ a_3 = 15;$ 2) $a_3 = 8,\ a_5 = 2;$ 3) $a_2 = 18,\ a_4 = 14.$

437. Между числами –10 и 5 вставьте число так, чтобы получились три последовательных члена арифметической прогрессии.

438. Найдите девятнадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:

1) $a_{13} = 28,\ a_{20} = 38;$ 2) $a_{18} = -6,\ a_{20} = 6;$ 3) $a_6 = 10,\ a_{11} = 0.$

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ!

1. В арифметической прогрессии: 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$. Найдите a_{10} и сумму первых десяти ее членов.

2. В прогрессии: 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$. Найдите b_6 и сумму первых шести ее членов.

3. Докажите, что последовательность: 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) 128, 32, 8 ..., является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

439. При каком значении x следующие числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$; 3) x^2, $10x$, 25?

440. Покажите, что следующие числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии:

1) $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos 2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1; 4) $\sin 5\alpha$, $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$, $\sin\alpha$.

441. Сколько нужно взять последовательных нечетных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 252?

442. Найдите a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;
3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$.

443. Для геометрической прогрессии вычислите:

1) b_9, если $b_1 = 4$ и $q = -1$;
2) b_7, если $b_1 = 1$ и $q = \sqrt{3}$.

444. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$.

445. Между числами 4 и 9 вставьте положительное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.

446. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

447. Покажите, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$.

448. Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 минут, а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 минут. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 49 минут, если он начал загорать в среду?

449. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$.

450. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$.

451. Часы бьют один раз, когда показывают половину очередного часа, и каждый час столько раз, каково время от 1 до 12. Сколько раз часы пробьют за сутки?

Тестовые задания к главе IV

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $d = -2$. Найдите S_{101}.

A) –9797; B) –9798; C) –7979; D) –2009.

2. В арифметической прогрессии $d = 4$, $S_{50} = 5000$. Найдите a_1.

A) –2; B) 2; C) 100; D) 1250.

3. В арифметической прогрессии $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$. Найдите d.

A) 4; B) 2; C) 3; D) 3,5.

4. В арифметической прогрессии $a_2 + a_9 = 20$. Найдите S_{10}.
A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.

5. Найдите пятый член последовательности натуральных чисел, дающих при делении на 8 остаток 7.
A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.

6. Найдите номер члена прогрессии 1, 8, 15, 22, ... , равного 701.
A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.

7. Найдите номер, начиная с которого члены прогрессии 1002, 999, 996, ... будут отрицательными числами.
A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.

8. В арифметической прогрессии $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$. Найдите a_{100}.
A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.

9. В арифметической прогрессии $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$. Найдите n.
A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.

10. В арифметической прогрессии $a_{12} + a_{15} = 20$. Найдите S_{26}.
A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.

11. Поместите между числами 1 и 11 таких 99 чисел, которые вместе с данными образуют арифметическую прогрессию. Найдите для этой прогрессии S_{50}.
A) $172\frac{1}{2}$; B) 495; C) 300; D) 178.

12. Найдите номер, начиная с которого члены арифметической прогрессии с $a_1 = -20{,}7$, $d = 1{,}8$ будут положительными числами.
A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.

13. В последовательности чисел, кратных 7, найдите номер члена, равного 385?
A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.

14. В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$. Найдите S_6.
A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.

15. В геометрической прогрессии $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$. Найдите b_1.
A) $242\frac{2}{3}$; B) 81; C) $121\frac{1}{3}$; D) 240.

16. В геометрической прогрессии $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$. Найдите q.

A) 4; B) 2; C) 8; D) $\frac{1}{2}$.

17. В геометрической прогрессии 6 членов. Сумма первых трех членов равна 26. Сумма следующих трех членов – 702. Найдите знаменатель прогрессии.

A) 4; B) 3; C) $\frac{1}{3}$; D) $2\sqrt{3}$.

18. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ Найдите q.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{64}{65}$; C) $\frac{63}{64}$; D) $\frac{1}{4}$.

19. В геометрической прогрессии $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2-\sqrt{3}$. Найдите S.

A) $2+\sqrt{3}$; B) 3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; D) 2.

Практические и межпредметные задачи

Задача 1. Свободно падающее тело за первую секунду падает на 4,9 м, а за каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. За сколько секунд тело упадет на землю, если оно пролетело 4410 метров?

△ По условию задачи за первую секунду тело пролетело $a_1=4{,}9$, за вторую $a_2=4{,}9+9{,}8$, за третью $a_3=a_2+9{,}8=a_1+2\cdot 9{,}8$ метров и так далее. За n-ю секунду оно упало на $a_n=a_{n-1}+9{,}8=a_1+(n-1)9{,}8$ метров, то есть расстояния за каждую секунду образуют арифметическую прогрессию. Следовательно, если тело за n секунд упало на землю, то по формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии получим

$$4410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2\cdot 4{,}9 + (n-1)\cdot 9{,}8}{2}\cdot n.$$

Откуда из уравнения $4{,}9n^2=4410$, $n^2=900$, получаем $n=30$.

Ответ: Тело упало на землю за 30 секунд. ▲

Задача 2. Вкладчик положил в банк b сумов под p% процентов годовых и через n лет забрал все деньги. Сколько денег получил вкладчик через два года, если $b=4\,000\,000$ сумов, $p=8$?

△ Если первоначальный вклад был b сумов, то через год на счету будет $b_1=b\cdot(1+\frac{p}{100})$ сумов. Для следующих годов возможны следующие варианты:

1) За каждый следующий год начисляют проценты, исходя от начального вклада в b сумов. Тогда через два года на счету будет $b_2=b+1+\frac{bp}{100}+\frac{bp}{100}=b\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ сумов и так далее, а через n лет у вклачика будет $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сумов. Такой способ начисления процентов называют *простым процентом*. Тогда

$$b_2=4\,000\,000\cdot1{,}16=4\,640\,000 \text{ при } b=4\,000\,000 \text{ сумов, } p=8.$$

2) За каждый следующий год проценты начисляются на сумму, накопленную за предыдущие годы. Тогда через два года получится сумма $b_2=b_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ и так далее, а через n лет она составит $b_n=b_{n-1}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ сумов. Такой способ начисления процентов называют *сложным процентом*.

Если $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$, то $b_2=4\;000\;000\cdot1{,}08^2=4\;665\;600$ сумов.

Ответ: в случае простого процента $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сумов; 4 640 000 сумов; в случае сложного процента $b_n=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ сумов; 4 665 600 сумов. ▲

Упражнения

1. Свободно падающее тело за первую секунду падает на 4,9 м, а за каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние преодолело тело за пятую секунду?

2. В каждом следующем ряду сектора цирка на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько мест в секторе, если:
1) в первом ряду 8 мест, а рядов 22;
2) в первом ряду 10 мест, а рядов 21?

3. Туристы запланировали пройти вдоль реки 140 км. В первый день они прошли 5 км, а каждый следующий день на 2 км больше предыдущего. Сколько дней длилось их путешествие?

4. Дрожжевые клетки размножаются делением пополам. Сколько клеток получится после 10 кратного деления, если первоначально было 6 клеток?

5. Заработная плата рабочего завода в течение календарного года ежемесячно повышалась на одинаковую величину. Общая сумма денег за июнь, июль и август составила 9 900 000 сумов, а за сентябрь, октябрь и ноябрь 10 350 000 сумов. Найдите сумму заработной платы рабочего за весь год.

6. При лечении воздушными ваннами в первый день процедура длится 15 минут, затем ежедневно прибавляют по 10 минут. Сколько дней длится лечение воздушными ваннами по данной схеме, если последняя процедура продолжалась 1 час 45 минут?

7. Эластичный мяч, брошенный с высоты, каждый раз при ударе о землю отскакивает на высоту, составляющую 80% от предыдущей (высоты). Найдите сумму вертикальных расстояний пройденных мячом вниз и вверх, если он был брошен с высоты 3 метров (рис. 88).

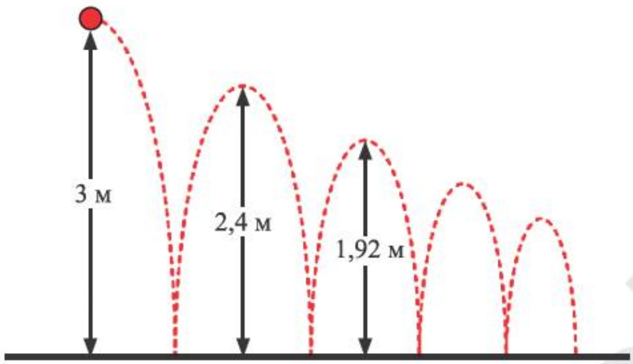


Рис. 88.

Исторические задачи

1. *Задача Беруни.* Докажите, что в геометрической прогрессии с положительными членами: $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$, если число членов нечетно; $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ если число членов четно.
2. *Задача из папируса Ахмеса (2000 лет до н. э.). Распределите 10 мер зерна между 10 крестьянами так, чтобы каждый следующий получил зерна на* $\frac{1}{8}$ больше, чем предыдущий.

Исторические сведения

В своей книге „Памятники минувших поколений" Абу Райхан Беруни в задаче об изобретении шахмат вычисляет сумму первых 64 членов прогрессии с $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$. Он показывает, что если вычесть из числа, соответствующего k-ой клетке доски, число 1, разность будет равна сумме чисел, соответствующих всем клеткам, предшествующим k-ой, то есть доказывает, что

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}.$$

ГЛАВА V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§34 СОБЫТИЯ

Теория вероятностей и математическая статистика – это наука о связях между случайными событиями, изучении их закономерностей и применении следствий из них при решении практических задач.

1. Невозможные, достоверные и случайные события.

В жизни событием называют любой происходящий или не происходящий процесс. Кроме этого событиями являются любые опыты или испытания проводимые людьми, результаты проводимых наблюдений и измерений. Все события можно разделить на невозможные, достоверные и случайные.

Невозможным событием называют событие, которое не может произойти в данных условиях. Приведем примеры невозможных событий:

1) вода в озере замерзает при +30°С;

2) выпадение цифры 8 при бросании игрального кубика, на гранях которого написаны цифры от 1 до 6.

Достоверным событием называют событие, которое обязательно произойдет в данных условиях. Например, 1) после зимы пришла весна; 2) при бросании игрального кубика выпала цифра не больше 6 (кроме 0)

Случайным событием называют событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти. Следующие события являются примерами случайных событий: 1) случайно выбранное натуральное число от 1 до 50 делится на 7; 2) при бросании монеты выпал орел.

2. Совместные и несовместные события.

Два события, которые в заданных условиях могут произойти одновременно, называют совместными, если же они не могут произойти одновременно, то их называют несовместными. Например, „солнце взошло" и „день холодный" – совместные события, а события „солнце зашло" и „солнце взошло" – несовместные события. Рассмотрим следующие события, связанные с игральным кубиком: 1) выпало 3 очка; 2) выпало 4 очка; 3) выпало больше 3 очков; 4) выпало очко, кратное трем. Среди этих событий имеются три пары совместных событий: 1) и 4) (так как число 3 кратно трем); 2) и 3) (так как 4 очка больше 3); 3) и 4) (например, 6 очков). А следующие события несовместные: 1) и 2) (одновременно не могут выпасть два разных очка); 1) и 3) (одновременно не может выпасть и больше 3 очков, то есть 4, 5, 6 очков, и 3 очка); 2) и 4) (число 4 не кратно трем).

3. Равновозможные события.

Рассмотрим примеры следующих событий:

Орел *Решка*

Рис. 89.

1) при однократном бросании монеты выпала „решка" и выпал „орел" (рис. 89);

2) при однократном бросании кубика „выпало 1 очко" „выпало 2 очка", …, „выпало 6 очков";

3) при бросании кубика, одна грань которого выкрашена в синий цвет, а остальные – в красный, „выпал синий цвет на верхней грани" и „выпал красный цвет на верхней грани";

4) из коробки, в которой 10 белых и 1 черный шар, вынули один шар. „шар оказался белым“ и „шар оказался черным“.

В примерах 1) и 2) ни одно из событий не имеет преимущество перед другим (если, конечно, монета и кубик правильные). Такие события называют **равновозможными событиями**.

3) и 4) это – примеры событий не являющихся равновозможными. Действительно, 5 граней кубика красные, а один синий, следовательно, возможность выпадения красной грани больше возможности выпадения черной грани. Точно также возможность вынуть из коробки белый шар больше возможности вынуть черный шар.

Упражнения

В упражнениях представлены события, происходящие в данных условиях. Определите (устно) для каждого события является ли оно невозможным, достоверным или случайным **(452–456):**

452. 1) У двух учеников школы одинаковые имена; 2) рост всех учеников школы одинаков.

453. Найдено третье слово на десятой странице случайно раскрытого учебника алгебры. Это слово: 1) „вероятность“; 2) начинается с „!“ .

454. Выбран один из учащихся списка в журнале 9 класса (в нем есть и девочки, и мальчики): 1) это мальчик; 2) выбранному учащемуся 16 лет; 3) выбранному учащемуся 15 месяцев; 4) этому учащемуся больше 3 лет.

455. Барометр показывает, что сегодня в Самарканде нормальное атмосферное давление. Тогда: 1) у всех самаркандских женщин вода закипела при $t = 70°C$; 2) температура воздуха опустилась до $-5°C$, вода в озере замерзла.

456. Брошены два игральных кубика: 1) на первом кубике выпало 4 очка, а на втором 6 очков; 2) сумма очков на двух кубиках равна 1; 3) сумма очков на двух кубиках равна 14; 4) на каждом из двух кубиков выпало по 5 очков; 5) сумма очков на двух кубиках не больше 12.

Объясните, какие из данных пар событий в следующих упражнениях совместны, а какие несовместны (**457–459**):

457. При игре в шашки Саодат и Шухрата: 1) Саодат выиграла; Шухрат проиграл; 2) Саодат проиграла; Шухрат проиграл.

458. Брошен игральный кубик. На его верхней грани выпало: 1) 5 очков; 3 очка; 2) 1 очко; нечетное число очков.

459. Из коробки с домино выбрана одна кость, тогда: 1) одно из чисел больше 4, второе равно 6; 2) одно число не меньше 5, второе не больше 5; 3) одно из чисел 5, сумма двух чисел 12; 4) оба числа больше 4, сумма чисел не больше 9.

460. Из следующих событий составьте всевозможные пары совместных и несовместных событий: 1) „идет дождь“; 2) „на небе нет ни одного облачка“; 3) „температура воздуха +37°C“.

461. Из следующих событий составьте всевозможные пары совместных и несовместных событий: 1) „пришла весна“; 2) „по расписанию сегодня 6 уроков“; 3) „сегодня 1 января“; 4) „температура воздуха в Ташкенте +40°C“.

462. Один из четырех спичечных коробков пуст, а остальные со спичками. Открыли один из случайно выбранных коробков. Равновозможны ли события: „коробок пуст“ и „коробок не пуст“?

463. У игрального кубика: 1) 1 грань зеленая; 2) 2 грани зеленые, а остальные красные. Равновозможны ли события: „выпала зеленая грань“ и „выпала красная грань“?

464. В урну положили 6 белых, 6 красных, 6 синих и 6 желтых пронумерованных шаров и перемешали. Случайным образом выбрали один шар. Будут ли равновозможными следующие события: 1) „выбранный шар белый“ и „выбранный шар синий“; 2) „номер выбранного шара 5“ и „номер выбранного шара 4“; 3) „выбранный шар красный и его номер 2“ и „выбранный шар желтый и его номер 6“; 4) „выбранный шар красный“ и „выбранный шар не красный“; 5) „номер выбранного шара не больше 2“ и „номер выбранного шара больше 2“?

§35 ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Встречаясь в жизни с разными событиями, мы часто оцениваем степень возможности появления этого события. При этом о некоторых событиях мы говорим, что „такое невозможно“, а про другие „это обязательно произойдет“ или „большая вероятность, что это событие произойдет“ или „небольшая вероятность, что это событие произойдет“. Оценка степени возможности появления события связана с понятием вероятности.

Впервые общий подход к решению задач, связанных с вероятностью обсуждался в письмах французских ученых XVII века Блеза Паскаля (1623-1662) и Пьера Ферма (1601-1665), которыми они обменивались в ходе решения ряда математических задач. Блез Паскаль в своем письме от 28 октября 1654 года к Пьеру Ферма в частности пишет:

„Бросая игральный кубик, мы не знаем какое число выпадет. Но известно, что выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 имеет равные возможности. Кроме того, выпадение одного из чисел в результате опыта (бросании кубика) является случайным событием. Если принять вероятность случайного события за 1, то выпадение одного из этих чисел, например, 6 (аналогично и других чисел) будет в шесть раз меньше, то есть равна $\frac{1}{6}$“.

Возможность успешного появления того или иного события математики называют ***вероятностью события*** и обозначают буквой P – по первой букве латинского слова *probabilitas* – вероятность.

Если событие „выпало 5 очков“ при бросании игрального кубика обозначить буквой A, то вероятность события A обозначают $P(A)$. Это записывают так $\boldsymbol{P(A)=\frac{1}{6}}$ и читают „вероятность события A равна $\frac{1}{6}$“.

Задача 1. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 20 (на каждой карточке одно число). Карточки положили на стол числами вниз и перемешали. Найдите вероятность того, что на случайно выбранной карточке написано 7.

△ Так как имеется 20 карточек и каждое число от 1 до 20 написано один раз, то могут произойти 20 равновозможных событий (результатов опыта, исходов): 1) выпало число 1; 2) выпало число 2; ….; 20) выпало число 20.

Здесь событие „выпало какое-то число“ является случайным. Вероятность этого события равна 1, а вероятность события A – „выпало число 7“ в 20 раз меньше, то есть $P(A) = \frac{1}{20}$.

Ответ: $\frac{1}{20}$ ▲.

Кроме ***элементарных событий***, рассмотренных выше, можно рассматривать и ***сложные события***. Например, пусть в задаче 1 нужно найти вероятность выпадения простого числа. Рассмотрим событие A – „выпадение простого числа, не большего 20“. Это событие может произойти в 8 случаях – при выпадении чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Эти исходы называются *благоприятствующими* событию A. Из всех возможных исходов (их 20) 8 являются благоприятствующими событию A, поэтому вероятность события A:

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Если в некотором эксперименте возможно n равновероятных попарно несовместных исходов, m из которых благоприятствуют событию A, то отношение $\frac{m}{n}$ называют вероятностью появления события A и пишут:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Задача 2. Найдите вероятность выпадения нечетного числа очков при бросании игрального кубика.

△ Имеется 3 исхода благоприятствующих событию A – „выпадению четного числа очков“ (выпадение 1, выпадение 3 и выпадение 5), то есть $m = 3$. А число всех равновозможных исходов $n = 6$, поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$. ▲

Задача 3. В коробке имеется 6 красных и 4 синих шаров. Наудачу вынимают один из них. Найдите вероятность того, что при этом вынут красный шар.

△ Опыт имеет 10 равновозможных исходов: выбран 1-й шар, 2-й шар, …, 10-й шар, то есть $n = 10$. А число благоприятствующих исходов $m = 6$. Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$. ▲

На основании формулы (1) о вероятности достоверного, невозможного и случайного событий можно сказать следующее:

Если событие A достоверно произойдет, то все исходы будут благоприятными, то есть $m = n$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Если событие A не может произойти, то не существует благоприятствующих исходов, то есть $m = 0$. Следовательно, $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Если же событие A является случайным, то число благоприятствующих исходов удовлетворяет условию $0 < m < n$. Поэтому, $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Упражнения

465. В приведенных ниже случаях перечислите все равновозможные элементарные события, которые могут произойти:1) бросание монеты; 2) бросание игрального кубика; 3) бросание тетраэдра с гранями белого, красного, желтого и синего цветов; 4) кручение рулетки, разделеной на 6 секторов, обозначеных A, B, C, D, E и F.

466. Из полного комплекта домино случайным образом выбрали одну кость. Найдите вероятность того, что на ней числа:

1) 6 и 5; 2) 0 и 1; 3) одинаковые; 4) разные.

467. В коробке 4 красных и 5 синих шаров. Наудачу выбран один шар. Найдите вероятность того, что выбранный шар:
1) красный; 2) синий; 3) зеленый; 4) красный или зеленый.

468. В коробке 3 синих, 4 желтых и 5 красных шаров. Наудачу выбран один шар. Какова вероятность того, что выбранный шар:
1) синий; 2) желтый; 3) красный; 4) не синий; 5) не желтый; 6) не красный?

469. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 12 (на каждой карточке одно число). Карточки положили на стол, числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на случайно выбранной карточке написано число:
1) 5; 2) четное; 3) кратное 3; 4) кратное 4; 5) делящееся на 5; 6) простое?

470. Нигора забыла две последние цифры номера телефона подруги и набрала его наудачу. Какова вероятность того, что Нигора наберет номер подруги?

471. Из 1000 лотерейных билетов 30 выигрышные. Купили один билет. Какова вероятность того, что этот билет:
1) выигрышный; 2) невыигрышный?

472. Студент при подготовке к экзаменам не успел выучить один из 30 заданных билетов. Какова вероятность того, что студент выберет выученный им билет?

473. Монету последовательно подбрасывали 6 раз и каждый раз выпадало решка. Какова вероятность того, что при следующем бросании выпадет решка?

474. Из колоды в 52 карты наудачу извлекается одна карта. Какова вероятность того, что этой картой будет:
1) бубновая шестерка; 2) восьмерка; 3) валет красного цвета; 4) трефовая карта с числом; 5) бубновая карта с нечетным числом?

§36 ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Определение вероятности, данное в предыдущем параграфе, называют *классическим определением*. Классическое определение не требует обязательного проведения испытания или эксперимента: все равновозможные и благоприятствующие исходы определяются теоретически.

По этому определению число элементарных равновозможных исходов выражается конечным определенным числом. Однако на практике, например, в естествознании, экономике, медицине, производстве и других областях, при изучении случайных событий, часто встречаются опыты, количество исходов которых невозможно охватить.

В некоторых других случаях, без проведения фактических опытов очень сложно или невозможно определить, являются ли исходы равновероятными. Например, на призводстве лампочек, до непосредственной проверки лампочек на брак, сложно представить, являются ли исходы такой проверки равновероятными. Поэтому, на практике, наряду с классическим определением вероятности, используют *статистическое определение вероятности*. Перед этим следует ввести понятие *относительной частоты*.

! ***Относительной частотой*** **события** A **в данной серии экспериментов называют отношение числа экспериментов** M**, при которых это событие произошло, к числу всех испытаний** N**. При этом число** M **называют** ***частотой*** **события** A**.**

Относительную частоту случайного события A обозначают $W(A)$. Тогда по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}. \tag{1}$$

Задача 1. В классе 30 учеников. 6 учеников получили по проведенной контрольной 5. Найдите относительную частоту отличных оценок, полученных за контрольную работу.

△ Пусть событие A – „получена оценка 5“, это событие произошло 6 раз, то есть $M = 6$. Общее число экспериментов $N = 30$, поэтому

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$. ▲

Французский исследователь Бюфон (1707-1788) подбросил монету 4040 раз, и орел выпал 2048 раз. Значит, в данной серии экспериментов, относительня частота выпадания орла равна $W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,5069$. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) подбросил монету 24000 раз и орел выпал 12012 раз. Значит, в данной серии экспериментов, относительня частота выпадания орла равна $W(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005$.

Сравнивая результаты этих двух примеров, мы видим, что значение относительной частоты может меняться в зависимости от определенных экспериментов и их количества. Однако, основное свойство относительной частоты случайного события заключается в следующем: при увеличении числа испытаний она стабилизируется, колеблясь около некоторого числа. Это число принимают за *статистическую вероятность* случайного события. Например, в случае с подбрасыванием монеты, это число равно 0,5. И в экспериментах Бюфона, и в экспериментах Пирсона, полученные значения относительной частоты близки к 0,5. Значит, при подбрасывании монеты, статистическая вероятность будет равна 0,5.

Многие учение и иследователи проводили большое количество экспериментов по изучению различных событий, подобных подбрасыванию монеты, на основании их работ, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654-1705) обосновал *закон больших чисел*:

При большом количестве экспериментов, относительная частота $W(A)$ события A на практике мало отличается от вероятности $P(A)$. То есть при большом количестве экспериментов можно считать, что $P(A) = W(A)$.

Задача 2. В следующей таблице приведены сведения о туристах, прибывших из-за границы и туристах внутри некоторого государства (внутренних туристах):

Годы	Общее число туристов	
	Число иностранных туристов	Число внутренних туристов
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Найдите относительную частоту числа туристов внутри страны по представленным годам.

Число туристов внутри страны:

$M = 403989 + 348953 + 316897 + 346103 + 351028 = 1766970$,

а число иностранных туристов: $610623 + 746224 + 822558 + 774262 + 811314 =$ $= 3764981$.

Общее число туристов: $N = 1766970 + 3764981 = 5531951$.

Тогда,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx \mathbf{0,3194.}$$

Ответ: $W \approx 0,3194$.

Упражнения

475. Заполните последний столбец таблицы:

Порядковый номер	Эксперимент	Число (N) экспериментов	Событие A	Частота события A	Относительная частота события A $\left(W(A)=\frac{M}{N}\right)$
1	Бросание монеты	150	Выпадение решки	78	
2	Стрельба из лука по мишени	200	Попадание в мишень	182	
3	Бросание игрального кубика	400	Выпадение 4	67	

476. Опросив 920 горожан о том, как они добираются до работы, получили следующие сведения: 350 из них едут на машине, 420 – на городском транспорте, 80 – на велосипеде и 70 идут пешком. Найдите относительную частоту числа горожан едущих: 1) на машине; 2) на городском транспорте; 3) на велосипеде; 4) идущих пешком.

477. 70 из 5000 произведенных твердых дисков оказались бракованными. Найдите относительную частоту числа бракованных дисков, записав ее в процентах.

478. В группе юных баскетболистов провели упражнения по бросанию мяча в корзину. Результаты приведены в следующей таблице:

Число бросков мяча в корзину (N)	10	50	100	250	500
Число попаданий мяча в корзину (M)	6	32	68	155	320
Относительная частота попаданий мяча в корзину (W)					

Заполните последнюю строку таблицы. Что можно сказать о значении вероятности P попаданий мяча в корзину (с точностью до одной десятой)?

§37 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Статистика – это наука, занимающаяся сбором и анализом информации о различных случайных величинах, а также представлением этих данных в виде таблиц, диаграмм, графиков и так далее.

Случайной величиной **называют величину, которая может принимать различные значения случайным образом в ходе наблюдения или проведения эксперимента**

О таких величинах говорят, что их значения зависят от случая.

Примерами случайных величин могут служить, например, количество космических частиц, падающих из космоса на школьный двор, количество звонков, попадающих на телефонную станцию, скорость молекул чая в пиале, то, какое значение выпадет при бросании игрального кубика, и так далее.

Задача 1. Подбрасывают два игральных кубика. Можно ли определить с наибольшей вероятностью, какой будет сумма очков на двух кубиках?

Найдем вероятность появления каждого значения суммы очков. Общее количество значений есть количество всех возможных сумм очков, выпадающих на двух кубиках: $6 \cdot 6 = 36$. Составим таблицу суммы очков:

1-ый кубик	2-ой кубик					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

С помощью таблицы определим значение m – число благоприятствующих исходов для каждого значения суммы:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ \ m_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Вероятность появления той или иной суммы при подбрасывании двух кубиков можно оформить в виде таблицы:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\left(p = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Из таблицы видно, что с наибольшей вероятностью $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ выпадает сумма очков, равная 7.

Ответ: С наибольшей вероятностью выпадает сумма очков равная 7. ▲

В первой задаче сумма очков, при подбрасывании двух кубиков – *случайная величина*. Обозначим ее за X. Тогда значениями случайной величины X будут числа $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$. В таблице представлены значения вероятностей P_1, P_2,..., P_{10}, P_{11}, соответствующих каждому значению X:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко ответить на вопросы, например, какие значения X имеют одинаковые вероятности; для каких значений X вероятность будет наибольшей, и так далее. Эта таблица называется *таблицей распределения* вероятностей случайной величины X – суммы очков при подбрасывании двух кубиков.

Таблица, содержащая вероятности для каждого значения случайной величины X, называется *таблицей распределения вероятностей случайной величины*.

Таблицы распределения вероятностей случайной величины составляются на основании результатов вычислений вероятностей.

На практике, после проведения экспериментов, строят *таблицы распределения частот* или *относительных частот значений случайных величин*. После этого для наглядности, таблицу распределения представляют в виде *диаграммы* или *полигона частот*. Вы познакомились с представлением данных в виде диаграммы и полигона частот в курсе Алгебры 8 класса.

Задача 2. Для изучения числа сотрудников, работающих в компаниях, были собраны данные по количеству сотрудников в 36 компаниях и представлены в виде таблицы:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Используя эти сведения, составьте: 1) таблицу распределения частот (M) и относительных частот (W); 2) полигон частот.

△ 1) Из таблицы видно, что, если число сотрудников обозначить за X, то это будет случайная величина. Внимательно изучив таблицу, видим, что эта случайная величина принимает значения от 23 до 33 и подсчитав сколько раз появляются эти числа в таблице, строим таблицу распределения частот:

X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Разделив каждую из частот на число $N = 36$ компаний, получим таблицу распределения относительных частот:

	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \dfrac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Напомним, что сумма всех частот равна $N = 36$, а сумма всех относительных частот равна 1.

2) На рисунке 90 представлен полигон частот числа сотрудников компании:

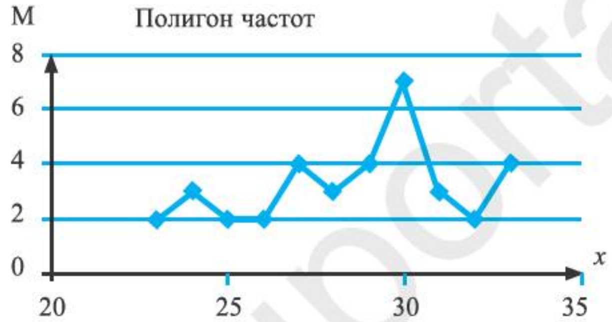


Рис. 90.

Если нужно найти сумму всех значений некоторых величин, то используют введенный Л.Эйлером знак $\sum$. Например, если частота M принимает значения $M_1, M_2, \ldots, M_k$, то пишут:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Сумма всех частот случайной величины равна N:

$$\sum M = N.$$

Сумма всех относительных частот произвольной случайной величины равна 1.

$$\sum W = \sum\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} =$$
$$= \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Рассматриваемые в данном параграфе случайные величины принимают отличающиеся друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными величинами* (от латинского *dickretus* – разделенный).

Если же случайная величина может принимать все значения на определенном промежутке, то такую величину называют *непрерывной случайной величиной*. В виде примеров непрерывных случайных величин можно привести изменение температуры воздуха, время, затрачиваемое на путь от дома до школы, высоту растущего тополя, время прибытия автобуса на остановку и тому подобное.

Несмотря на то, что непрерывная случайная величина может принимать бесконечное число значений, можно найти ее распределение.

Для этого, промежуток значений непрерывной случайной величины делят на отрезки и вычисляют частоту (или вероятность) попадания случайной величины в каждый из отрезков.

Например, пусть ученик записывал посещение спортзала в течение 100 дней, и каждый раз занимался в зале не более 1 часа 15 минут. Тогда, учитывая, что промежуток времени в минутах, отведенный на каждую тренировку [0; 75], разделим его на 5 равных временных промежутков, и запишем в таблицу частоты времени, затраченого на тренировки:

T (минут)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Вычислив непосредственно сумму частот, можно увидеть, что $\sum M = N = 100$.

Данные этой таблицы – *гистограмму частот* можно представить в виде ступенчатой фигуры (рис. 91). Если длина основания каждой ступени h, то высота ступени будет равна $\frac{M}{h}$, здесь M – частота случайной величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь ступени равна $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь нижней части фигуры равна $\sum M = N$.

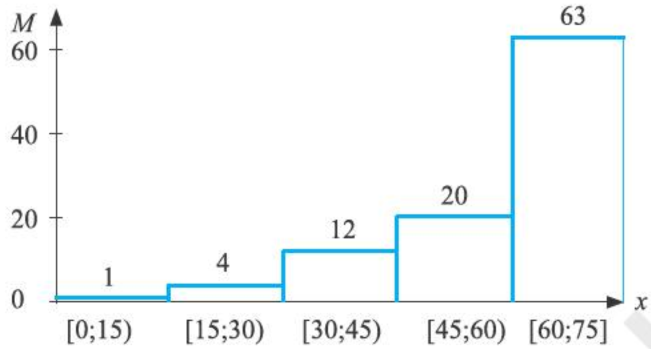


Рис. 91.

Если же при помощи частот будут определены относительные частоты:

T (минут)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W=\frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

тогда ступенчатая фигура, построенная с их помощью (рис. 92), называется *гистограммой относительных частот*.

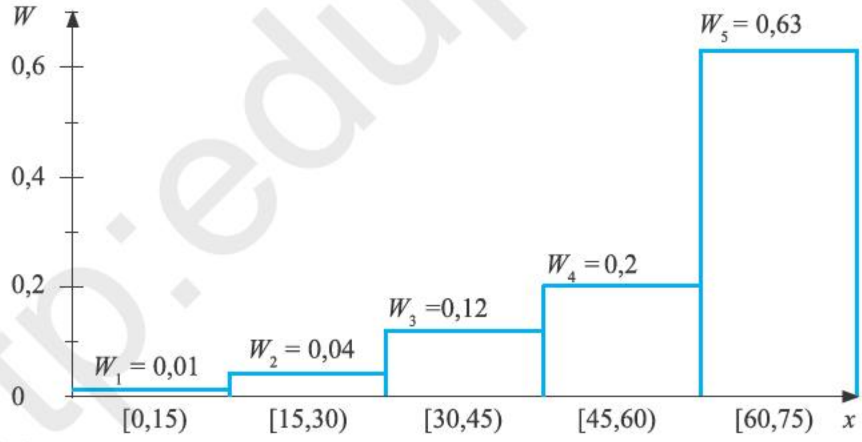


Рис. 92.

Площадь каждой ступени гистограммы относительных частот будет равна соответствующему значению W. Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\sum W = 1$).

Упражнения

479. Постройте таблицу распределения вероятностей P случайных величин X „выпавших очков“ при бросании: 1) обычного игрального кубика; 2) кубика, на двух гранях которого число 1, на двух число 2 и на двух число 3; 3) кубика, на трех гранях которого число 3, на двух число 2 и на одной число 1; 4) кубика, на двух гранях которого число 1, на трех число 2 и на одной число 3.

480. На стол бросают две монеты. Выпадению „орла“ соответствует 0, выпадению „решки“ – 1. Постройте таблицу распределения вероятностей P случайной величины X – суммы заданных числовых значений.

481. На стол одновременно бросают два одинаковых тетраэдра, на гранях которых написаны числа 1, 2, 3, 4, при этом число очков определяют по грани, лежащей на столе. Можно ли определить наибольшую вероятность: 1) суммы; 2) произведения очков, выпавших при бросании двух тетраэдров?

482. Бросили два игральных кубика. Постройте таблицу распределения произведения вероятностей выпавших на двух кубиках очков.

483. Владелец кафе, чтобы быстро обслужить посетителей в обеденное время, правильно распределить число обслуживающего персонала и правильного планировать затрачиваемые средства, составил таблицу числа обедающих за 50 дней:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

С помощью этой таблицы для случайной величины X – числа обедающих в кафе составьте: 1) таблицу чистот (M) и таблицу относительных частот (W); 2) полигон частот.

484. Ниже представлена таблица числа девочек и мальчиков посетивших закрытый бассейн за пять месяцев:

Месяц	Дети, посещающие бассейн	
	Девочки	Мальчики
Апрель	311	357
Май	284	404
Июнь	278	417
Июль	340	412
Август	322	406

Найдите частоту, относительную частоту и постройте гистограмму частот случайной величины X – числа мальчиков, посетивших бассейн.

485. Постройте таблицу распределения частот случайной величины X – участие цифр в следующих телефонных номерах

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

486. Постройте полигоны частоты и относительной частоты случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. В таблице написаны размеры обуви 16 мальчиков 9 класса:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

Постройте таблицу распределения частот случайной величины X – размеров обуви мальчиков 9 класса.

§38. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Вы уже знакомы с понятиями: пустое множество, выборка, среднее значение, мода, медиана, введенными в IV главе учебника 8 класса „Алгебра“, посвященной анализу данных. Точно такие же понятия можно ввести и для случайных величин.

В статистике в качестве множества данных рассматривают числовые значения случайных величин с учетом их частот. При этом множество всех значений случайных величин называют *генеральным множеством*, а некоторую часть этого множества – *выборкой*. Выборку называют *репрезентативной*, если в ней участвуют только случайные величины из генерального множества и если отношение частот в ней подобно отношению частот в генеральном множестве.

Пример. Пусть распределение частот M случайной величины X представлено следующим образом:

X	–3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

и пусть все значения этой случайной величины (заметьте, что их число 17000) приняты за генеральное множество. Рассмотрим следующие три выборки:

1-таблица

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

2-таблица

X	–3	9	11
M	5	7	3

3-таблица

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

Распределение данное в 1-таблице является репрезентативным, так как в ней также участвуют значения –3, 5, 9, 11 и только они и отношение частот в этой выборке такое же как в генеральном множестве: 5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5:2:7:3.

Распределение во 2-таблице не является репрезентативным, так как в нем не участвует значение случайной величины, равное 5.

Распределение в 3-таблице также не является репрезентативным, так как в нем не сохранено отношение частот: 5 000:2 000:7 000:3 000≠5:6:7:3.

Данные сведения, например, значения случайной величины, иногда можно описать или оценить с помощью одного числа. Это число называется *мерой центральной тенденции* случайных величин. Примерами меры центральной тенденции могут служить мода, медиана и среднее значение.

Наибольшее значение частоты случайных величин в рассматриваемой выборке называется *модой* и обозначается M_0.

Например, если выборка чисел состоит из 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3, то ее мода равна 8, а мода выборки 5, 6, 11, 3, 3, 5 имеет два значения – M_2= 3, M_2= 5. У выборки 1, 3, 7, 20, 6, 11 нет моды.

Если запишем значения выборки в порядке возрастания, то число, которое делит все элементы выборки на две равные части, называется *медианой* и обозначается M_e. Если число элементов упорядоченной выборки нечетное, то медиана равна числу, находящемуся в середине. Если же число элементов упорядоченной выборки четное, то медиана равна среднему арифметическому двух чисел, стоящих в середине выборки.

Задача 1. Найдите медиану выборки случайных величин:

1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Запишем элементы выборки в порядке возрастания: – 5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Имеем нечетное число данных. Слева и справа от числа 5 расположено по три числа, то есть 5 является средним числом выборки, поэтому M_e=5.

2) Запишем элементы выборки 8, 5, 3, 4, 7, 2 в порядке возрастания: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Число данных четно. 4 и 5 – числа, расположены в середине выборки, поэтому $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5.$

Ответ: 1) 5; 2) 4,5.

При изучении выборок важное значение имеет еще одно понятие – размах выборки, с которым вы познакомились в 8 классе. *Размахом выборки* называют разность между ее наибольшим и наименьшим значениями и обозначают R.

Размах выборки показывает на сколько разбросаны значения выборки.

Пример. Сопоставьте размах следующих выборок: 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 и 190, 187, 198, 189, 195, 190.

В 1-ой выборке наибольшее значение равно 27, а наименьшее – 8. Следовательно, размах 1-ой выборки R_1=27–8=19.

Наибольшее значение 2-ой выборки равно 198, а наименьшее – 186. Поэтому размах 2-ой выборки R_2=198–186=12.

Итак, размах значений 1-выборки имеет больший разброс по сравнению со 2-й выборкой.

Напомним, что *средним (или средним арифметическим) значением* случайной величины называют отношение суммы всех чисел выборки к их числу. Среднее всех значений случайной величины X обозначают $\overline{X}$.

Задача 2. Найдите среднее значение выборки случайной величины, распределение частот которых представлено в следующей таблице:

Таблица 4

	3	4	5	7	10
	3	1	2	1	3

$$\overline{X} = \frac{3\cdot 3+4\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 1+3\cdot 10}{3+1+2+1+3} = \frac{9+4+10+7+30}{10} = 6.$$

Ответ: 6.

Еще одним из важных понятий определяющих выборку случайных величин, для которых известно распределение вероятностей, является понятие *математического ожидания*.

Если вероятности значений X_1, X_2, ..., X_n случайной величины X сответственно равны P_1, P_1, ...P_n, то число

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_nP_n \tag{1}$$

называют *математическим ожиданием* случайной величины X.

Например, пусть вероятности случайной величины X распределены следующим образом:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Тогда математическое ожидание этой случайной величины:

$$= 6 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Разность между значением случайной величины и средним значением выборки называют *средним отклонением*.

Например, если значение случайной величины $X_1 = 35$, а среднее значение $\overline{X} = 32$, то среднее отклонение X_1 равно $X_1 - \overline{X} = 35 - 32 = 3$.

Легко показать, что сумма средних отклонений всех значений выборки равна нулю:

$$(X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + ... + (X_n - \overline{X}) = (X_1 + X_2 + ... + X_n) - n \cdot \overline{X} =$$

$$= (X_1 + X_2 + ... + X_n) - n \cdot \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = 0.$$

Поэтому, чтобы охарактеризовать значения случайной величины вместо суммы средних отклонений используют среднее арифметическое квадратов средних отклонений. Эту величину называют *дисперсией* (в переводе с латинского *dispersion* – рассеивание, разложение).

Если же случайная величина X принимает N различных значений и ее средняя равна $\overline{X}$, то ее дисперсию находят по следующей формуле:

$$=\frac{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2}{N}. \qquad (2)$$

Следовательно, дисперсия равна среднему арифметическому квадратов средних отклонений значений случайной величины.

Если значения X_1, X_2,..., X_k случайной величины X повторяются с частотами M_1, M_2,..., M_k, соответственно, то ее дисперсию можно вычислить по формуле:

$$D=\frac{(X_1-\bar{X})^2M_1+(X_2-\bar{X})^2M_2+\cdots+(X_k-\bar{X})^2M_k}{M_1+M_2+\cdots+Mk}, \qquad (3)$$

где

$$\bar{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\cdots+X_kM_k}{M_1+M_2+\cdots+Mk}.$$

Например, мы определили, что среднее значение случайной величины из 4-таблицы $\bar{X}$ = 6. Теперь вычислим дисперсию этой величины:

$$D=\frac{(X_1-\bar{X})^2M_1+(X_2-\bar{X})^2M_2+\cdots+(X_k-\bar{X})^2M_k}{M_1+M_2+\cdots+M_k}=$$

$$=\frac{(3-6)^2\cdot3+(4-6)^2\cdot1+(5-6)^2\cdot2+(7-6)^2\cdot1+(10-6)^2\cdot3}{3+1+2+1+3}=$$

$$=\frac{27+4+2+1+48}{10}=\frac{82}{10}=8{,}2.$$

Если случайная величина будет иметь наименование единицы измерения (например, сантиметр), то ее среднее значение $\bar{X}$ и среднее отклонение $X-\bar{X}$ будут иметь те же единицы измерения (сантиметр), что и величина X. Чтобы оценить среднее отклонение удобно пользоваться теми же измерениями, что и случайная величина X. Поэтому используют квадратный корень из дисперсии, то есть значение $\sqrt{D}$.

Квадратный корень из дисперсии называют *среднеквадратичным отклонением* и обозначают σ, то есть σ= $\sqrt{D}$.

Например, мы уже подсчитали, что дисперсия случайной величины из 4-таблицы D = 8,2. Если теперь по калькулятору найти квадратный корень из этого числа, то найдем среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{8,2} \approx 2,86.$$

В статистике дисперсию и среднеквадратичное отклонение также называют мерой разброса значений случайных величин вокруг среднего значения.

Упражнения

488. В следующей таблице приведено распределение значений случайной величины генерального множества:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Какие из множеств будут репрезентативными для генерального множества:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Найдите моду выборки:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Найдите медиану выборки:
1) 18, 13, 35, 19, 7;
2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11;
4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Найдите размах выборки:
1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Найдите середину выборки:

1) 34, –10, 23, –18;   2) –3, 6, –19, –12, 1;

3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0, 7, 0, 6, 0, 4;   4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Найдите моду, медиану и середину выборки:

1) 4, –3, 2, 0, 3, –2;   2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Найдите среднее арифметическое значений выборок случайной величины X по следующей таблице распределения частот:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Найдите математическое ожидание значений случайной величины X по следующей таблице распределения вероятностей:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Найдите дисперсию выборки:

1) 9 см, 11 см, 8 см, 10 см;   2) 18 кг, 16 кг, 15 кг, 19 кг;

3) 8 с, 11 с, 8 с, 9 с, 9с;   4) 1 м, 9 м, 4 м, 8 м, 8 м.

497. Найдите дисперсию множества значений случайной величины X по следующей таблице распределения частот:

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Вычислите среднеквадратичное значение, используя среднее значение элементов выборки:

1) 4 г, 5 г, 8 г, 3 г, 5 г;

2) 9 см, 12 см, 7 см, 10 см, 12 см.

499. Найдите среднеквадратичное отклонение случайной величины X по следующей таблице распределения частот:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

Упражнения к главе V

500. (Устно). Назовите все элементарные события, которые могут произойти: 1) при перечислении месяцев в случайном порядке; 2) при бросании двух монет и определении выпавшей стороны; 3) при перечислении простых чисел, меньших 50; 4) при перечислении случайных двузначных чисел кратных 3.

501. В коробке 4 черных, 5 красных и 6 синих шаров. Случайным образом из коробки вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что этот шар: 1) черный; 2) красный; 3) синий; 4) не черный; 5) не красный; 6) не синий; 7) зеленый; 8) или черный, или красный или синий.

502. Наугад названо одно из натуральных чисел от 1 до 50. Определите вероятность того, что это число: 1) 7; 2) не 7; 3) кратно 7; 4) кратно 10; 5) не является простым числом; 6) не больше 30.

503. На стол бросается игральный кубик и монета. Найдите вероятность того, что 1) выпадет 5 очков и решка; 2) выпадет простое число и орел.

Найдите размах, моду, медиану и середину выборки (**504–507**):

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Найдите дисперсию и среднеквадратичное отклонение выборки:
1) 6, 11, 8, 9;
2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4;
4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4;
6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Найдите дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины Z по следующей таблице распределения частот:

1)

Z	–1	0	2	4
	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
	1	2	3	1

510. Сравните дисперсии выборок:
1) 4, 5, 7, 5, 9 и 6, 9, 7, 8; 2) –2, 2, 3 и –3, –1, 1, 3, 4.

511. Найдите математическое ожидание случайной величины X по следующей таблице распределения вероятностей:

1)

	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Тестовые задания к главе V

1. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 15 (на каждой карточке по одному числу). Карточки положили на стол числами вниз и перемешали. Найдите вероятность того, что на случайно выбранной карточке написано простое число.

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{3}{5}$.

2. В коробке 3 белых и 7 черных шаров. Случайным образом из коробки достали один шар. Найдите вероятность того, что это будет белый шар.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

3. Из 27 учащихся класса 15 мальчиков. В класс пришли один мальчик и две девочки. Как изменится относительная частота случайной величины X – число мальчиков в классе?

A) увеличится на $\frac{1}{45}$; B) уменьшится на $\frac{1}{45}$;

C) увеличится на $\frac{2}{45}$; D) уменьшится на $\frac{2}{45}$.

4. Найдите сумму моды и медианы следующей выборки значений случайной величины: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

A) 14; B) 17; C) 16; D) 13 .

5. Найдите произведение моды и медианы следующей выборки значений случайной величины: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.

6. Найдите среднее значение выборки случайной величины X по следующей таблице распределения частот:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

A) $1\frac{5}{9}$; B) $1\frac{4}{9}$; C) $1\frac{1}{9}$; D) 1.

7. Найдите математическое ожидание случайной величины X по следующей таблице распределения вероятностей:

	–1	2	3	5	7
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

A) $\frac{25}{9}$; B) $\frac{26}{9}$; C) $\frac{29}{9}$; D) $\frac{30}{9}$.

8. Найдите среднеквадратичное отклонение случайной величины X по следующей таблице распределения частот:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.

9. Найдите дисперсию случайной величины X по следующей таблице распределения вероятностей:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

Практические и межпредметные задачи

Задача 1. В лотерее разыгрывается автомобиль стоимостью 5000 у.е. (условных единиц), 4 телевизора по 250 у.е. и 5 сотовых телефонов по 200 у.е. В общей сложности продается 1000 билетов по 7 у.е. Постройте таблицу распределения чистого выигрыша участника лотереи, купившего 1 билет и посчитайте математическое ожидание.

△ Пусть X – чистый выигрыш с одного билета, тогда его стоимость:
если не выпадет выиграш, $0 - 7 = -7$;
если выпадет сотовый телефон, $200 - 7 = 193$;
если выпадет телевизор, $250 - 7 = 243$;
если выпадет автомобиль, $5\,000 - 7 = 4\,993$ условных единиц.
Учитывая то, что 990 билетов из 1000 невыигрышные, а $5 + 4 + 1 = 10$ билетов выигрышные, имеем по определению вероятности:

Вероятность того, что случайная величина X:

примет значение – 7 равна $\frac{990}{1000} = 0{,}990$;

примет значение 193 равна $\frac{5}{1000} = 0{,}005$;

примет значение 243 равна $\frac{4}{1000} = 0{,}004$;

примет значение 4 993 равна $\frac{1}{1000} = 0{,}001$;

Следовательно, таблица распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Основываясь на таблице распределения можно вычислить математическое ожидание:

$$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0,$$

то есть, среднее значение выигрыша равно 0. Данный результат показывает, что все деньги с продажи лотерейных билетов уйдут на оплату выигрышей.

Ответ: таблица распределения:

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

и математическое ожидание $E = 0$.▲

Задача 2. На вакансию переводчика в фирму претендуют два кандидата. Им был предоставлен равный срок и выдан один и тот же текст на 125 страницах. В таблице ниже указано количество страниц, которое каждый из них переводил каждый день:

Дни недели	Количество страниц за 1 день	
	1-ый кандидат (X)	2-ой кандидат (Y)
Понедельник	24	25
Вторник	26	31
Среда	25	27
Четверг	23	22
Пятница	27	20

Какому кандидату будет отдано предпочтение после того, как работадатель проанализирует данные таблицы?

△ Каждый кандидат перевел 125 страниц за 5 дней, значит средняя производительность труда каждого кандидата:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (стр./день)}.$$

Моды у обеих случайных величин X и Y нет, а их медианы одинаковые (25 и 25). Какого же кандидата выгоднее взять на работу? В этом случае следует сравнить *устойчивость* общей производительности труда. Для этого следует сравнить сумму квадратов отклонений или дисперсии:

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего значения $\overline{X} = \overline{Y} = 25$		Квадраты отклонения	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Понедельник	24	25	–1	0	1	0
Вторник	26	31	1	6	1	36
Среда	25	27	0	2	0	4
Четверг	23	22	–2	–3	4	9
Пятницы	27	20	2	–5	4	25
Всего	125	125	0	0	10	74

Как мы видим, сумма квадратов отклонений для X равна 10, а для Y равна 74, или же вычислим дисперсии:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Итак, дисперсия случайной величины X меньше дисперсии случайной величины Y. На практике данный результат показывает отсутствие устойчивости производительности труда второго кандидата: в некоторые дни он не полностью использует свои возможности, в другие дни старается работать больше своих возможностей, что, конечно же, отрицательно сказывается на качестве работы. Очевидно, что взять на работу следует первого кандидата.

Ответ: предпочтение отдается первому кандидату. ▲

Задача 3. Ниже приведены таблицы распределения вероятностей случайных величин X и Y – попадания в мишень двух лучников:

Для первого лучника

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Для второго лучника

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Какой из лучников стреляет точнее?

△ Ясно, что лучшим стрелком из лука считается тот лучник, число набраных очков которого больше. Поэтому вычислим математическое ожидание случайных величин X и Y:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \dots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \dots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36.$$

Отсюда следует, что средний результат попаданий в цель одинаковый.

Вычислим теперь дисперсию и среднеквадратичное отклонение X и Y:

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Таким образом, несмотря на то, что средние значения результатов попадания в цель равны $E(X) = E(Y)$, дисперсия у второго лучника меньше чем у первого: $D(Y) < D(X)$, то есть разброс очков относительно „центра" ($E(Y) = 5{,}36$) у второго лучника меньше. Другими словами, его очки не намного отличаются от 5,36, по сравнению с первым лучником. Следовательно, чтобы достигнуть более высоких результатов, второму лучнику нужно лучше прицеливаться и стараться поднять $E(Y)$ выше.

Ответ: первый лучник попадает в цель лучше. ▲

Задача 4. В таблице дано распределение частот числа X забитых голов игроками футбольной команды в ворота противника:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

Вычислите среднеквадратичное отклонение от среднего значения числа всех забитых голов.

△ Для начала вычислим среднее значение:

$$\bar{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \cdots + X_5M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 1 + 1} = \frac{0 + 3 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{14}{10} = 1{,}4.$$

Результаты следующих вычислений приведены в таблице:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X - \bar{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X - \bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X - \bar{X})^2 \cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Тогда дисперсию и среднеквадратичное отклонение вычисляют следующим образом:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_5 - \bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{5{,}88 + 0{,}48 + 0{,}72 + 2{,}56 + 6{,}76}{10} = \frac{16{,}4}{10} = 1{,}64,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}64} \approx 1{,}28.$$

Ответ: $\sigma \approx 128$. ▲

Упражнения

1. Результаты многолетних статистических исследований случайной величины X – числа мальчиков в семьях с 4 детьми – представлена в следующей таблице распределения вероятностей. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Следующая таблица содержит баллы, поставленные двум гимнасткам 9 судьями по 10 бальной шкале:

Номер гимнастки	Номер судьи и поставленый бал								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Рассматривая полученые гимнастками баллы как случайные события X и Y, вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение и сравние их.

3. Студент, занимающийся изучением требований покупателей к качеству обуви, в течение 25 дней записывал число проданных пар обуви. Пусть X_1 число пар обуви, проданных в первом магазине, X_2 число пар обуви, проданных во втором магазине. Используя данные следующих таблиц вычислите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение для случайных величин X_1 и X_2. Пользуясь полученными результатами, сравните продажу обуви в магазинах.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

4. С помощью двух различных измерительных приборов были измерены диаметры оснований 20 стальных заготовок цилиндрической формы. Результаты измерений первым прибором (с точностью до 1 мм), приведены в левой таблице, а вторым – в правой:

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

Сравните дисперсии случайных величин d_1 и d_2.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА „АЛГЕБРЫ“ 9 КЛАССА

512. Постройте график функции:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Устно.) Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$, выясните ее свойства (рис. 93).

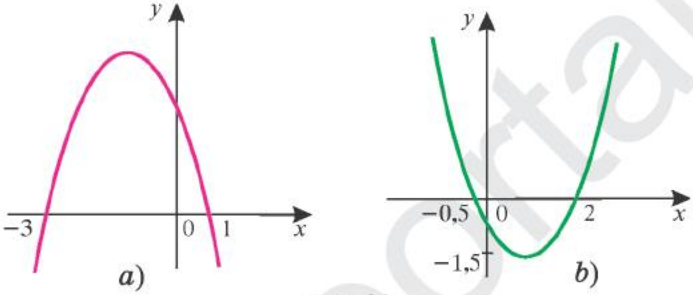


Рис. 93.

514. Постройте график функции и установите ее свойства:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. На одной координатной плоскости постройте графики функций:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ и $y = 3x^2 - 2$.

Решите неравенство (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \leq 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \leq 0$; 6) $x^2 - 7 \geq 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\le 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\ge 0$.

Решите методом интервалов неравенство (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\le 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\ge 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\le 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\ge 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\ge 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\le 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Площадь трапеции больше 19,22 см^2. Ее средняя линия в два раза больше ее высоты. Найдите среднюю линию и высоту трапеции.

524. Сторона параллелограмма на 2 см больше высоты, опущенной на эту сторону. Найдите длину этой стороны, если площадь параллелограмма больше 15 см^2.

525. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\ge 2$.

526. Найдите коэффициенты p и q квадратного трехчлена x^2+px+q, если этот трехчлен при $x=0$ принимает значение, равное -14, а при $x=-2$ принимает значение -20.

527. Найдите $p-q$, если парабола $y=x^2+px+q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{2}{3}$;

2) касается оси абсцисс в точке $x=-7$;

3) пересекает ось абсцисс в точке $x=2$ и ось ординат в точке $y=-1$.

528. Запишите уравнение параболы, если известно, что она пересекает ось абсцисс в точке $x=5$, а ее вершиной является точка $\left(2\frac{3}{4}; 10\frac{1}{8}\right)$.

529. Зеркало отражателя телескопа (рефлектора) имеет в осевом сечении вид параболы (рис. 94). Напишите уравнение этой параболы.

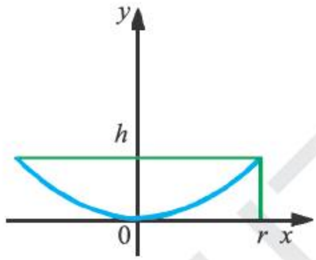


Рис. 94.

530. Найдите коэффициенты квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если ее график проходит через точки:

1) $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ и $C(0;\ -6)$;
2) $K(-2;0)$, $L(1;0)$ и $M(0;\ 2)$.

531. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2 + b^2 \le (a+b)^2$; 2) $a^3 + b^3 \le (a+b)^3$.

532. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2}$; 2) $y = |x-1|$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

533. Найдите действительные корни уравнения:

1) $x^2 - |x| - 2 = 0$; 2) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$; 3) $|x^2 - x| = 2$;
4) $|x^2 + x| = 1$; 5) $|x^2 - 2| = 2$; 6) $|x^2 - 26| = 10$.

534. Извлеките корень:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

535. Упростите:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0{,}5\sqrt{343}$.

536. Сравните значения выражений:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ и $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ и $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Вынесите множитель из под знака корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a<0,\ b>0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a>0, b>0$;

539. Внесите множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$, где $x\geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, где $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, где $a\geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a<0$.

540. Выясните, принадлежит ли графику функции $y=-\frac{25}{x}$ точка:

1) $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1; 250)$.

541. Выясните, принадлежит ли графику функции $y=\sqrt{1-2x}$ точка:

1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; $E\ (-4;\ 3)$.

542. Постройте график функции:

1) $y=x^2+6x+10$; 2) $y=-x^2-7x-6$.

543. Назовите несколько углов поворота, при которых точка $P(1;\ 0)$ перемещается в точку: 1) $A(0;\ 1)$; 2) $B)$ $(0;\ -1)$; 3) $C(-1;\ 0)$; 4) $D(1;\ 0)$.

544. Вычислите: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Выясните положительно или отрицательно число:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

546. Дано: $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-0{,}28$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Вычислите: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Разложите на множители:

1) $\sin 2\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha-\sin 2\alpha$; 4) $1-\sin 2\alpha-\cos^2\alpha$.

548. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если:

1) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}<0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}<0$.

549. Вычислите n-ый член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=10,\ d=6,\ n=23$; 2) $a_1=42,\ d=\frac{1}{2},\ n=12$;

3) $a_1=0,\ d=-2,\ n=7$; 4) $a_1=\frac{1}{3},\ d=\frac{2}{3},\ n=18$.

550. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1=2,\ a_n=120,\ n=20$.

551. Докажите, что последовательность, n-ый член которой равен $a_n=\frac{1-2n}{3}$, является арифметической прогрессией.

552. В геометрической прогрессии найдите:

1) b_4, если $b_1=5$ и $q=-10$;

2) b_1, если $b_4=-5000$ и $q=-10$.

553. Вычислите n-ый член и сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=3,\ q=2,\ n=5$; 2) $b_1=1,\ q=5,\ n=4$.

554. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=\frac{1}{4},\ q=2,\ n=6$; 2) $b_1=\frac{1}{5},\ q=-5,\ n=5$.

555. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots$; 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots$; 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$.

556. Вынесите множитель из под знака корня:

1) $\sqrt{20a^4b}$, где $a<0,\ b>0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, где $a<1$;

557. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $b>a$.

558. Исключите иррациональность из знаменателя:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

559. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}}-\dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Решите уравнение:

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha$.

564. Докажите тождество:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

565. В арифметической прогрессии $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Найдите сумму первых 17 членов прогрессии.

566. В геометрической прогрессии найдите b_1 и b_5, если $q=3$, $S_6=1\,820$.

567. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна, а второй член равен $-\frac{1}{2}$. Найдите третий член прогрессии.

Упростите выражение:

568. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

569. Вычислите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если: 1) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$.

ОТВЕТЫ

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2=1$; 4) нет таких действительных значений x, при которых значение данной функции равно –5. **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$. $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2) Нулей нет; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) нулей нет. **6.** 2) $p=3$, $q=-4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$. **9.** B и C. **12.** 2) ($\sqrt{5}$; 5), ($-\sqrt{5}$; 5); 4) (0; 0), (2; 4); 6) (1; 1). **13.** 2) Да. **14.** 2) Да; 4) нет. **16.** 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \le \le x \le 5$; 3) $x \le -4$, $x \ge 4$; 4) $-6 < x < 6$. **20.** 2) (–3; –4,5), (2; –2). **21.** 2) Да; 4) нет. **22.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая; 4) не является ни возрастающей, ни убывающей. **23.** 3 м/с^2. **26.** 2) (0; –5); 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2) Нет; 4) Нет. **29.** 2) (1; 0), (0,5; 0), (0; –1); 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **30.** $y = x^2 - 2x + 3$. **32.** 2) $k=-10$. **34.** 1) $y=2(x-3)^2$; 2) $y=2x^2+4$; 3) $y=2(x+2)^2-1$; 4) $y = 2(x-1,5)^2+ +3,5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) (1;0), (–5;0), (0;10); 4) (0;14). **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 и 5. **42.** Сторона, параллельная стене, 6 м; другие стороны по 3 м. **43.** Нет. **44.** 2) При $x=1$ наименьшее значение $y=-5$; 4) при $x=1$ наименьшее значение $y=-2$. **45.** 1) $a>0, b>0, c>0$; 2) $a<0, b>0, c<0$. **46.** 1) Через 5 с наибольшая высота равна 130 м; 2) $(5+\sqrt{26})$. **48.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **50.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x > -1$. **51.** 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **52.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **53.** 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. **56.** Положительные значения в промежутках $x < -3$, $x > 2$, отрицательные значения на интервале $-3 < x < 2$. **58.** 2) $x \le -1$, $x \ge 4$; 4) $-1 < x < 4$. **59.** 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \le -0,25$; $x \ge 1$. **60.** 2) $x = 7$; 4) нет решений. **61.** 2) Нет решений; 4) нет решений; 6) x – любое действительное число. **62.** 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$; $x > 0$. **64.** 2) $x < -\frac{5}{3}$ $x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x – любое действительное число. **65.** 2) x – любое действительное число; 4) $x \ne \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \le x \le 0$. **66.** 2) Нет решений; 4) $-0,5 < x < 3$. **67.** **2)** $x = 1$; 4) x – любое действительное число. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5$, $x > 3\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0$,

$x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1, x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} < x < < 0, x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2, x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \le x < 7$; 6) $-2 \le x < -1$, $x \ge 3$. **76.** 2) $x < 0{,}5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \le x \le -1$, $4 \le x \le 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \le x < 2$, $x \ge 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8 < x < -1$; 2) $x < -5, x > 2$; 3) $-1 < x \le -\frac{2}{5}$. **81.** 2) $y = 1$ при $x = 2$; $y = 5$ при $x = 0$ и $x = 4$; $y = 10$ при $x = -1$ и $x = 5$; $y = 17$ при $x = -2$ и $x = 6$. **82.** 1) $y(-2) = -1$, $y(0) = -5$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -11$, $y(3) = 4$; 2) $y = -3$ при $x = -\frac{1}{2}$; $y = -2$ при $x = -1$; $y = 13$ при $x = \frac{3}{2}$; $y = 19$ при $x = \frac{4}{3}$. **84.** 2) $x \le 2$, $x \ge 5$; 4) $-2 \le x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = 1$; 2) $y = -2$ при $x = 2$; $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 4$; $y = 2$ при $x = -2$ и $x = 6$; $y = 4$ при $x = -4$ и $x = 8$. **86.** 2) $x \ne -1$; 5) $-1 \le x \le 1$, $x \ge 4$; 6) $-5 \le x \le 1$, $x > 2$. **87.** 2) Да; 4) да. **93.** 2) $x = 16$; 4) $x = \frac{1}{16}$; 6) $x = \frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2) Нечетная; 4) не является ни четной, ни нечетной. **99.** 2) Нечетная; 4) нечетная. **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110.** 2) $x \le 3$; 4) $y < < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2) Ребро куба больше 7 дм. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0{,}2$. **117.** $x = \frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **121.** 2) $x = 2{,}25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x = 4$. **124.** 2) $2 \le x \le 3$; 4) $1 < x \le \quad \le 2$; 6) $x \ge 1$. **125.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; 4) нет такого значения x. **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 м и150 м. **131.** 2) $p = 1$, $q = 0$. **132.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2$, $x > 4$; 4) $x < 3$, $x > 4$. **134.** 2) $x < -6$, $x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}$, $x > 4$; 4) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **136.** 2) Нет решений; 4) нет решений; 6) нет решений. **137.** 2) $x < -1$, $1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4 < x \le 7$; 6) $x \ge 2$, $-\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge -1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** не менее 12 км/ч. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$. **143.** 2) $(-1; -1)$; $(1; 1)$. **144.** 2) $x > 2$; 4) $x \le -2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2)

x – любое число; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < -7$, $-3 \le x < -1$, $x \ge 3$. **148.** 2) Убывает; 4) убывает. **149.** 2) нечетная; 4) не является ни четной, ни нечетной. **150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < -1$, $x > 9$; 2) $-1 < x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154.** 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 и 13. **160.** 4 и 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 м, 200 м. **165.** 2) (4; 5) и (5; 4). **166.** 2) (1; –2) и (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) и (5; 2); 4) (1; 3) и (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) и (–20; –4); 4) (3; 6) и (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) и (9; 1). **176.** 2) Система не имеет решений. **177.** 2) $-9 \le x \le 3$; 4) $-6 \le x \le 2$. **178.** 2. $-\infty < x < -3$ и $2 < x < +\infty$. **179.** $-3 < x \le -2$ va $1 \le x \le 2$. **180.** $-7 < x < 0$. **181.** $-1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) и (4; 4); 2) (2; –2) и (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) и (6; –5); 4) (–1; 10) и (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) и (2; 3); 4) (2; 6) и (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) и (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) и(1; 5). **200.** 2) (–2; 1) и (2; 1); 4) (–1; 4) и (24; 0,6). **201.** 2) (4; $-\sqrt{3}$) и (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) и (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ и $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Длина 1,2 см и шишина 0,8 см. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$.

214. 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{\circ}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 м. **219.** 2 рад. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ см². **221.** 2 рад. **222.** 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) Вторая четверть; 4) четвертая четверть; 6) вторая четверть. **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **227.** 2) Вторая четверть; 4) четвертая четверть. **228.** 2) $x = 1{,}8\pi$,

$k=4$; 4) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 6) $x=\frac{5}{3}\pi$ $k=2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **231.** 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1; 6) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) -1; 4) -1; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) -1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **241.** 2) $x=2\pi k-1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=k\pi-1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 6) $x=\frac{2\pi k}{3}+1$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **242.** 2) Вторая четверть; 4) вторая четверть; 6) вторая четверть. **243**. 2) Плюс; 4) плюс; 6) плюс. **244.** 2) Минус; 4) минус; 6) плюс. **245.** 2) Плюс, плюс; 4) минус, минус; 6) минус, минус; 8) плюс, плюс. **246.** 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$. **247.** 2) $\sin 3>0$, $\cos 3<0$, $\operatorname{tg} 3<0$; 4) $\sin(-1{,}3)<0$, $\cos(-1{,}3)>0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)<0$. **248.** 2) Минус; 4) плюс; 6) плюс; 8) минус. **249.** Если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ или $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают; если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ или $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ противоположны. **250.** 2) минус; 4) плюс. **251.** 2) $\cos 1{,}3>\cos 2{,}3$. **252.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **253.** 2) во второй четверти. **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2) Выполняется; 4) выполняется. **257.** 2) Выполняется. **258.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos\alpha=\pm\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ **266.** 1) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1)

$x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$ **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **276.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) $-2\cos\alpha$. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) $\cos3\beta$; 4) -1. **284.** $-\sin\alpha-\sin\beta$. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) $-\sin\alpha-\cos\beta$; 4) $\sin\alpha-\cos\beta$. **288.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta)=\frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) $\cos6\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **312.** 2) $\cos2\alpha$. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$.

317. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, ...$ **318.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin2\alpha$. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320.** 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2) $2\sin\alpha$. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.
328. 2) Вторая четверть; 4) вторая четверть; 6) вторая четверть. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **330.** 2) 2; 4) -1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) $\sin2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}2\alpha$. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) $\cos0 > \sin5$. **340.** 2) Плюс; 4) минус. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin2\alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos2\alpha=-\frac{1}{9}$. **344.**

2) tgα. **345.** 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) cos4α. **350.** 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) Является; 4) является. **354.** 2) $n = 9$. **360.** 2) –3, –1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) –42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.** Да, $n = 11$. **366.** $n = 11$, нет. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) –13. **369.** 2) –100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) –192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$ $d = \frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **387.** 78. **388.** 44. **389.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **392.** 2) –3, 12, –48, 192, –768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. **400.** $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ или $b_5 = -6$, $b_1 = -30\frac{3}{8}$.. **401.** 659100 сум. **402.** 0,25 см². **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) –400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b = -1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5 = = 4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ или $q = -6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ или $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ или $S_5 = 521$. **415.** 2) Да; 4) да. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. **417.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) Нет; 4) да. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6 + 4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** $2a$. **423.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot R_1$. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **427.** $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) –1080. **429.** 143. **430.** 2) –22. **431.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **432.** 2) $b_n = -0{,}5 \cdot (-2)^{n-1}$. **433.** 2) $b_n = \frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10} = 1\frac{85}{256}$; 4) $S_9 = 5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$.

437. $24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19}=0$, $a_1=-108$. **441.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$; 4) $x_2=-4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16}=-1\frac{2}{3}$, $d=-\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) –27; 4) $\pm\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) Нет; 4) да. **450.** В среду. **451.** $a_1=8$ $d==-3$ или $a_1=2$, $d=3$. **452.** $a_1=5$, $d=-5$ или $a_1=-5$, $d=5$. **453.** 180 раз. **453.** 2) Невозможное. **454.** 2) Случайное; 4) достоверное. **457.** 2) Несовместное. **462.** Не равновозможное. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$; **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4%. **482.** 2) Можно, 4 очка. **488.** 3-я выборка. **489.** 2) 11; 4) 5 и 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 кг^2, 4) 6 м^2. **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 и 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15<x<2$; 4) $x\le 12$, $x\ge 12$. **517.** 2) $0<x<\sqrt{5}$; 4) $x<-\sqrt{3}$; $x>\sqrt{3}$. **518.** 2) $-9<x<6$; 4) $-2<x<0{,}1$; 6) $x\le\frac{1}{8}$, $x\ge 2$. **519.** 2) $x=-12$; 4) x – любое действительное число; 6) нет решений. **520.** 2) $-0{,}7<x<\frac{1}{2}$; 2) $-2\le x\le 1$. **521.** 2) $x\le -2$, $x=1$; 4) $x\le -\frac{1}{3}$, $0\le x\le 2$. **522.** 2) $-0{,}5\le x<2$. **523.** Высота больше 3,1 см, средняя линия больше 6,2 см. **524.** Больше 5 см. **525.** 2) $x<-7$, $-1\le x\le 2$; 4) $-1\le x<\frac{1}{3}$., $x>\frac{1}{3}$. **526.** $p=5$, $q=-14$. **527.** 2) $p=14$, $q=49$. **528.** $y=-2x^2+11x-5$. **529.** $y=\frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a=-1$, $b=-1$, $c=2$. **531.** *Указание.* 1) Обозначив $\frac{a}{b}=A^3$, $\frac{b}{c}=B^3$, $\frac{c}{a}=C^3$ и, учитывая, что $ABC=1$ перепишем данное неравенство в виде $A^3+B^3+C^3\ge 3ABC$, преобразуем его $(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC)\ge 0$. Неравенство $(A^2+B^2+C^2\ge AB+AC+BC$ получается при сложении неравенств $A^2+B^2\ge 2AB$, $A^2+C^2\ge 2AC$, $B^2+C^2\ge 2BC$; 2) сложите как среднее арифметическое и среднее геометрическое: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c$,

$\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a$, $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b$; 3) Вычтите правую часть неравенства из левой и запишите в виде: $(a+b)(a-b)^2+(b+\tilde{n})(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2$; 1) $x_{1,2}=\pm2$; 2) $x_{1,2}=\pm1$; 3) $x_{3,4}=\pm3$; 3) $x_1=-1, x_2=2$; 4) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1=0, x_{2,3}=\pm2$; 6) $x_{1,2}=\pm4, x_{3,4}=\pm6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}<(2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) Нет. **541.** 2) Нет. **544.** –1. **545.** 2) 190. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha=\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12}=47,5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1=5$. **553.** 2) $b_4=125, S_4=156$; 4) $b_4=81$, $S_5=61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}{a^2-b}$; 4) $0,1(5-\sqrt{5})5+\sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **560.** 2) $x=61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pi+2n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1=5$, $b_5=405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **561.** 8, 13, 18 yoki 20, 13, 6. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$.

Ответы к заданиям «Проверьте себя»

Глава I. **1.** $x_1=0$, $x_2=2$. **2.** $y>0$ при $-1<x<1$; $y<0$ при $x<-1$; $x>1$. **3.** 1) При $x>0$ функция возрастает; при $x<0$ функция убывает. **4.** 1) $x\geq1$; $-2\leq x\leq0$. **5.** 1) $x\neq1$; 2) $-3\leq x\leq3$. **6.** 1) $x=28$; 2) $x=1$.

Глава. III. **1.** 1) $\cos\pm=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\sin2\alpha=-\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

Глава IV. **1.** 1) $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **2.** 1) $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q=\frac{1}{3}$, $S=1,5$.

Ответы к практическим и межпредметным задачам

Глава I. 1. Скорость не должна превышать 60,01 км/ч. **2.** $n \leq 30$. **3.** 2 млн. **4.** 125. **5.** 1) 135; 2) 17739; 3) ≈ 4,9 мес.

Глава II. 1. 2) 20 рядов. **2.** В первой бригаде 8, а во второй 12 рабочих. **3.** 2) 16%. **4.** 2) 4 *л* и 12 *л*. **5.** В безветренную погоду.

Глава III. 1. 4) ≈335,42 км; 5) ≈2243,3 км. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 м. **4.** ≈12,8 м.

Глава IV. 1. 420. **2.** 10 км. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 сумов. **5.** 27 метров.

Глава V. 1. $E(X) = 26$, $D(X) = 0{,}9964$. 2. $E(X) \approx 8{,}94$, $E(Y) \approx 8{,}93$, $D(X) \approx 0{,}07$, $\mathrm{D}(Y) \approx 0{,}03$, $G(X) \approx 0{,}071$, $\sigma(Y) \approx 0{,}76$. 3. $E(X_1) = E(X_2) = 3{,}36$, $\sigma(X_1) \approx 1{,}47$, $\sigma(X_2) \approx 1{,}41$. 4. $E(d_1) = 60$, $D(d_1) = 1{,}2$, $E(d_2) = 60{,}02$, $D(d_2) = 0{,}76$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ

Глава V. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Алимов Ш. А.

А 45 Алгебра: учебник для 9 классов общеобразовательных школ/ Ш.А.Алимов, А.Р.Халмухамедов, М.А.Мирзахмедов. – 4-издание. – Ташкент: ИПТД „O‘qituvchi“, 2019. – 240 с.

УДК: 512(075.3)=161.1
ББК 22.14я72

ISBN 978-9943-5750-4-2

Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Rus tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4- nashri

„O‘qituvchi“ nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent – 2019

Original-maket „Davr nashriyoti“ MCHJ da tayyorlandi.

Переводчик и редактор Гульнара Юсупова
Дизайнер-оформитель *Р. Запаров*
Корректор *Ф.Хамидова*
Компьютерная верстка *Х. Сафаралиев*
Набор *С. Ниязова*

Издательская лицензия AI № 012. 20.07.2018. Подписано в печать с оригинал-макета 24.07.2019. Формат 70×90 1/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офестная. Усл п. л. 17,55. Учетно-издательские л. 16,6. Тираж 5 400 экз. Заказ № 19-187.

Агентство информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан. Издательско-полиграфический творческий дом "O‘qituvchi" Ташкент – 206, массив Юнусабад, ул. Янгишахар, дом 1. Договор № 73-19.

Агентство информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан. Отпечатано в типографии издательско-полиграфического творческого дома «O‘zbekiston» 100011. г. Ташкент, ул. А. Навои, дом 30.

Сведения о состоянии учебника, выданного в аренду

№	Имя, фамилия ученика	Учеб-ный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководи-теля	Состояние учебника при сдаче	Подпись класспого руководи-теля
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Таблица заполняется классным руководителем при передаче учебника в пользование и возвращении назад в конце учебного года.

При заполнении таблицы используются следующие оценочные критерии:

Повый учебник	**Состояние учебника при первой передаче.**
Хорошо	Обложка цела, не оторвана от основной части книги. Все страницы в наличии, не порваны, на страницах нет записей и помарок.
Удовлетворительно	Обложка не смята, слегка испачкана, края стёрты. Удовлетворительно восстановлен пользователем. Вырванные страницы восстановлены, но некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетвори-тельно	Обложка испачкана, порвана, корешок оторван от основной части книги или совсем отсутствует. Страницы порваны, некоторых вообше не хватает, имеющиеся исчерчены. Учебник к дальней-шему пользованию не пригоден, восстановить нельзя.